"On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem", Alan Turing, 1936

이 광근

소프트웨어무결점 연구센터
컴퓨터공학부
서울대학교

2/5/2014 @ 대한수리논리학회, 연세대학교
(6/23/2012 @ 튜링 탄생 100주년 기념 강연회, 대전)

Research On Software Analysis for Error-free Computing
소프트웨어 무결점 연구센터 KOSEF ERC

"On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem", *Proceedings of the London Mathematical Society, ser.2, vol.42 (1936-37). pp.230-265; corrections, Ibid, vol 43(1937) pp.544-546*

- 20세기 수학의 좌절을 재확인하는 데 동원된 소품
- 이것이 20세기 정보혁명의 주인공이 되는 아이러니

"On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem", *Proceedings of the London Mathematical Society, ser.2, vol.42 (1936-37). pp.230-265; corrections, Ibid, vol 43(1937) pp.544-546*

- 20세기 수학의 좌절을 재확인하는 데 동원된 소품
- 이것이 20세기 정보혁명의 주인공이 되는 아이러니

원조맛집을 가보는 재미

"On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem", *Proceedings of the London Mathematical Society, ser.2, vol.42 (1936-37). pp.230-265; corrections, Ibid, vol 43(1937) pp.544-546*

- 20세기 수학의 좌절을 재확인하는 데 동원된 소품
- 이것이 20세기 정보혁명의 주인공이 되는 아이러니

원조맛집을 가보는 재미 + 현란한 기술의 근본을 꽉 잡을 기초 체력

1936년, 8월 9일 vs 5월 28일

손기정

알란 튜링

1931년, 수학계의 "청천병력" 혹은 "희소식"

"기계적인 방식만으론 사실인지 판정할 수 없는, 그런 명제가 존재한다."

튜링의 그 때 그 시절(1/2)

- 1934년 11월, Cambridge U 학부졸업논문 제출
- 1935년 봄, Part III course on Foundations of Mathematics수강 (강사: Max Newmann)
- Newmann의 강의는 Gödel의 불완전성의 증명(Incompleteness Theorem)으로 마무리됨.
  - "기계적인 방식으로는 참/거짓을 판명할 수 없는 명제가 존재한다."
  - Newmann: "참/거짓을 판명해주는 기계적인 방식은 있을 수 없겠지."
  - 모든 참인 명제를 자동으로 만드는 기계는 불가능하겠지...

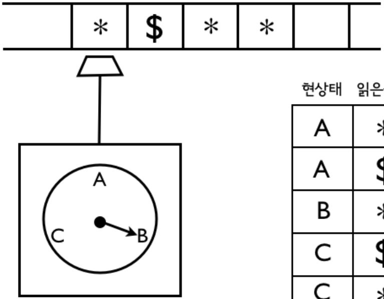
ROSAEC center
Research On Software Analysis for Error-free Computing
소프트웨어 무결점 연구센터 KOSEF ERC

튜링의 그 때 그 시절(2/2)

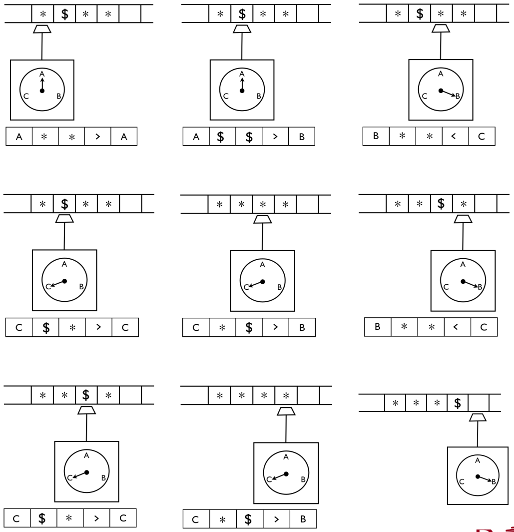
- Newmann강의를 수강후인 1935 초여름,
  - 1935년 4월 말, group theory에 대한 논문 제출 및 출판(London Mathematical Society). 이 논문은 폰 노이만 논문을 작게 개선한 것.
  - 1935년 동안은 또 양자역학에도 연구를 할까 생각함. 수리물리학 Fowler교수를 찾아가 연구꺼리를 얻었으나 진전이 없었슴.
  - Newmann이 강의때 던진 말이 튜링의 관심을 붙듬.
- 이 때쯤, 달리기 취미를 가지기 시작. 튜링 왈, “달리기를 마치고 풀밭에 누워 있는데 힐버트의 세번째 문제를 어떻게 풀지가 생각나더라.”

기계적인 방식으로 참인 명제 모두를 만들어낼 수 없다.

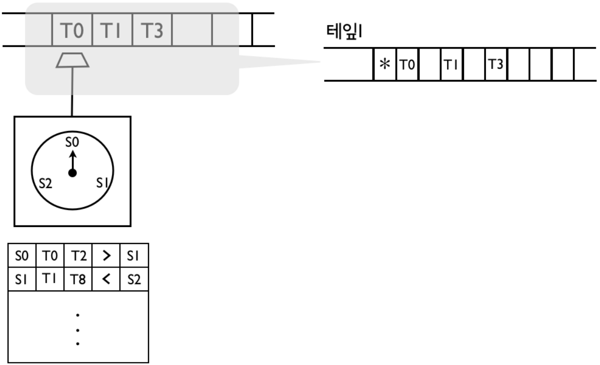
튜링기계: 기계적인 방식의 정의



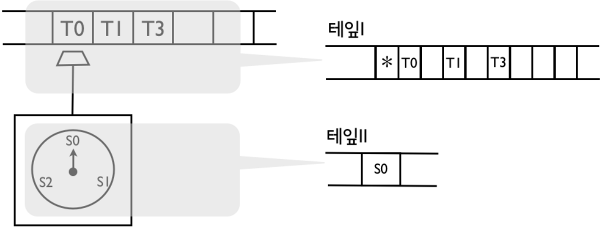
현상태	읽은심볼	쓸심볼	다음칸	다음상태
A	*	*	>	A
A	$	$	>	B
B	*	*	<	C
C	$	*	>	C
C	*	$	>	B


* $ * *
A * * > A
* $ * *
A $ $ > B
* $ * *
B * * < C
* $ * *
C $ * > C
* * * *
C * $ > B
* * $ *
B * * < C
* * $ *
C $ * > C
* * * *
C * $ > B
* * * $

튜링기계를 테잎에 표현하기(1/4)



튜링기계를 테잎에 표현하기(2/4)



S0	T0	T2	>	S1
S1	T1	T8	<	S2
⋮				

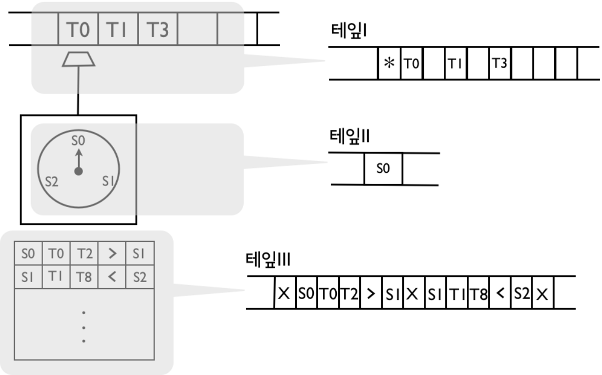
튜링기계를 테잎에 표현하기(3/4)

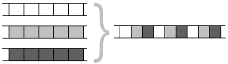
S0	T0	T1	>	S1
S1	T2	T12	<	S0

일렬로 다음과 같이

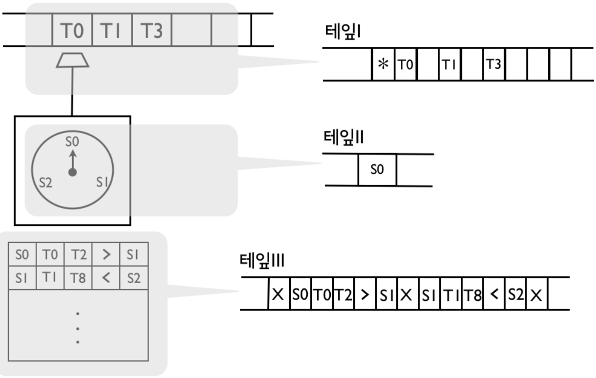
XS0T0T1>S1XS1T2T12<S0X

튜링기계를 테잎에 표현하기(4/4)





궁극의 기계: universal machine. 실행규칙



- 테잎I, II를 읽는다: Tj, Si
- 테잎III에서 Si, Tj 에 매치하는 규칙을 찾는다.

Si	Tj	Tj'	m	Si'

- 이 규칙이 지정한 일을 한다.

모든 튜링기계는 자연수의 갯수를 넘지 못한다.

- 일렬표현에 사용하는 심볼 17개: $S, T, <, >, ||, 0, \cdots, 9, X, *$
- 일렬: 17진수

- Lemma1 [$\exists$VERI $\implies \exists H$]. 모든 참인 명제를 만드는 튜링기계가 있다면 멈춤문제를 푸는 튜링기계가 있다.
- Lemma2 [$\nexists H$]. 멈춤문제를 풀 수 있는 튜링기계는 없다.

따라서 모든 참인 명제를 만드는 튜링기계는 존재할 수 없다.
QED

Lemma1 증명: ∃VERI $\implies$ ∃H

모든 참인 명제를 만드는 튜링기계 VERI가 있다면 멈춤문제를 푸는 기계 H가 존재한다.

Proof. $H(M) =$

1. VERI를 돌린다; (궁극의 기계로)
2. VERI는 모든 참인 명제를 만드므로, 언젠가는 "M은 멈춘다" 혹은 "아니다(M은 멈춘다)"을 만든다;
3. 그 결과에 따라 답한다.

ROSAEC center
Research On Software Analysis for Error-free Computing
소프트웨어 무결점 연구센터 KOSEF ERC

Lemma2 증명: $\not\exists H$

Proof. 모든 튜링기계와 입력은 자연수만큼: $M_1, M_2, \cdots,$ $I_1, I_2, \cdots.$

- H가 존재한다면, 아래 테이블을 채울 수 있다.

		입력			
		I_1	I_2	I_3	$\cdots$
튜	M_1	1	1	0	$\cdots$
링	M_2	1	0	1	$\cdots$
기	M_3	1	0	1	$\cdots$
계	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$

- 그러면, 다음의 튜링기계 M은 모든 튜링기계와 다르다!?

$$M(n) = \mathit{Table}(M_n, I_n) \times UM(M_n) + 1$$

모순. H는 존재할 수 없다. QED