

# SNU 4541.664A Program Analysis, Spring 2006

## Final Exam

12/18/2008, 13:00-16:00

학번:

이름:

**Problem 1 [20 × (5pts, -3pts)]** O/X로 답하라.

1. 귀납 규칙 집합  $\Phi$ 는 아래의 함수  $\phi$ 을 정의:

$$\phi(Y) = \{x \mid \frac{X}{x} \in \Phi, X \subseteq Y\}$$

하고,  $\Phi$  규칙들이 정의하는 집합은 아래의 집합이다:

$$\bigcup \{X \mid \phi(X) \subseteq X\}$$

2. 분석하고자 하는 프로그램의 소스 언어에 따라서 정적 프로그램 분석이 완벽(sound and complete)할 수 있다.
3. 분석하고자 하는 프로그램의 성질에 따라서 정적 프로그램 분석이 완벽(sound and complete)할 수 있다.
4. 현재의 집합 제약식을 이용한 분석(set-based analysis)들은 임의의 집합 제약식을 이용하는 자유가 없다.
5. 요약 해석(abstract interpretation)에서 요약 공간(abstract domain)이 무한하도록 정의될 수 있다.
6. 수업시간에 다룬 다형 타입시스템(polymorphic type system)은 단순 타입 시스템(simple type system) 보다 분석의 정확도가 높은 것이다.
7. 타입 시스템에 기초한 프로그램 분석은 주어진 증명규칙으로 프로그램에 대한 증명을 만들어 내는 것이다.
8. 다음과 같이 프로그램 분석을 디자인하면 그 분석은 옳다:

- 주어진 프로그램의 실제 의미는 연속함수  $F : 2^S \rightarrow 2^S$ 의 최고고정점으로 정의한다. ( $2^S$ 의 원소들 사이의 순서는 집합포함 순:  $x \sqsubseteq y = x \subseteq y$ )
- 주어진 프로그램의 요약된 의미는 단조함수  $\hat{F} : \hat{S} \rightarrow \hat{S}$ 의 최소 고정점으로 정의한다.
- $2^S$ 와  $\hat{S}$ 는 갈로아 연결

$$2^S \xleftrightarrow[\alpha]{\gamma} \hat{S}$$

되어있다.

9. 축지법/넓히기(widening)  $\nabla$ 의 조건은

- $\forall a, b \in \hat{D} : (a \sqsubseteq a \nabla b) \wedge (b \sqsubseteq a \nabla b)$
- $\forall$ 증가하는 체인  $\{x_i\}_i$  : 체인  $y_0 = x_0, y_{i+1} = y_i \nabla x_{i+1}$ 는 유한

이다.

10. 좁히기(narrowing)  $\Delta$ 의 조건은

- $\forall a, b \in \hat{D} : x \sqsupseteq y \Rightarrow (x \sqsupseteq (x \Delta y)) \wedge (y \sqsupseteq (x \Delta y))$
- $\forall$ 감소하는 체인  $\{x_i\}_i$  : 체인  $y_0 = x_0, y_{i+1} = y_i \Delta x_{i+1}$ 는 유한

이다.

11.  $A, B$ 는 집합이다. 그러면 다음 두 CPO사이에 갈로아 연결이 가능하다:

$$2^{A \overset{\text{fin}}{\rightarrow} B} \rightarrow 2^B \xleftrightarrow[\alpha?]{\gamma?} (A \overset{\text{fin}}{\rightarrow} 2^B) \rightarrow 2^B$$

12.  $A, B$ 는 집합이고  $2^B$ 와  $\hat{B}$ 사이에는 갈로아 연결되어 있다. 그러면 다음 두 CPO사이에 갈로아 연결이 가능하다:

$$2^{A \overset{\text{fin}}{\rightarrow} 2^B} \rightarrow 2^B \xleftrightarrow[\alpha?]{\gamma?} (A \overset{\text{fin}}{\rightarrow} \hat{B}) \rightarrow \hat{B}$$

13.  $A$ 는 집합이고  $A^\omega$ 는 길이가 무한 할 수도 있는  $A$ 원소들의 리스트들의 집합이다.  $2^A$ 와  $\hat{A}$ 사이에는 갈로아 연결되어 있다. 그러면 다음 두 CPO사이에 갈로아 연결이 가능하다:

$$2^{A^\omega} \xleftrightarrow[\alpha?]{\gamma?} \hat{A}$$

14.  $A$ 는 집합이고  $A^\omega$ 는 길이가 무한 할 수도 있는  $A$ 원소들의 리스트들의 집합이다.  $2^A$ 와  $\hat{A}$ 사이에는 갈로아 연결되어 있다.  $A$ 의 각 원소를 유한한 인덱스 집합  $I$ 의 한 원소로 맺어주는 함수가 존재한다. 이때 다음 두 CPO사이에 갈로아 연결이 가능하다:

$$2^{A^\omega} \xleftrightarrow[\alpha?]{\gamma?} I \rightarrow \hat{A}$$

15. 다음의 정수식 프로그래밍 언어를 타겟으로 하는 분석기를 정의하려고 한다.

$$\begin{aligned} e ::= & n \quad (n \in \mathbb{Z}) \\ & | e++ \\ & | e \bmod e \end{aligned}$$

$e \text{ mod } 0$  는  $e$ 의 값과 상관없이 임의의 양수가 되고,  $n++$ 는  $n + 1$ 를 뜻한다.

요약공간을 만드는 갈로아 연결

$$2^{\mathbb{Z}} \xrightleftharpoons[\alpha]{\gamma} \{\perp, 0, > 0, < 0, \top\}$$

을

$$\begin{aligned} \alpha\emptyset &= \perp \\ \alpha\{0\} &= 0 \\ \alpha X &= > 0 \quad \text{if } \forall x \in X : x > 0 \\ \alpha X &= < 0 \quad \text{if } \forall x \in X : x < 0 \\ \alpha X &= \top \quad \text{otherwise} \end{aligned}$$

로 하고 안전한  $\hat{+}$ 을 가장 정확하게 정의해서

$$\begin{aligned} \perp \hat{+} &= \perp \\ 0 \hat{+} &= > 0 \\ > 0 \hat{+} &= > 0 \\ < 0 \hat{+} &= \top \\ \top \hat{+} &= \top \end{aligned}$$

로 했다. 옳은가?

16. 또, 위의 요약공간에서 안전한  $\hat{\text{mod}}$ 를 가장 정확하게 정의하면 아래와 같다:

$$\begin{aligned} \perp \hat{\text{mod}} \star &= \perp \\ \text{else } \star \hat{\text{mod}} \perp &= \perp \\ \text{else } \star \hat{\text{mod}} 0 &= > 0 \\ \text{else } 0 \hat{\text{mod}} \star &= 0 \\ \text{else } \star \hat{\text{mod}} \star &= \top \end{aligned}$$

옳은가?

17. 수업시간에 다룬 단순 타입시스템의 안전한 알고리즘은 아래와 같이 정의될 수 있다:

$$M : \text{TyEnv} \times \text{Exp} \times \text{Type} \rightarrow \text{Subst}$$

$$\begin{aligned} M(\Gamma, n, \tau) &= \text{unify}(\iota, \tau) \\ M(\Gamma, x, \tau) &= \text{unify}(\tau, \tau') \quad \text{if } x : \tau' \in \Gamma \\ M(\Gamma, \lambda x.e, \tau) &= \text{let } S = \text{unify}(\alpha_1 \rightarrow \alpha_2, \tau) \quad \text{new } \alpha_1, \alpha_2 \\ &\quad S' = M(S\Gamma + x : S\alpha_1, e, S\alpha_2) \\ &\quad \text{in } S' \\ M(\Gamma, e e', \tau) &= \text{let } S = M(\Gamma, e, \alpha \rightarrow \tau) \quad \text{new } \alpha \\ &\quad S' = M(S\Gamma, e', S\alpha) \\ &\quad \text{in } S' \\ M(\Gamma, e + e', \tau) &= \text{let } S = \text{unify}(\iota, \tau) \\ &\quad S' = M(S\Gamma, e, \iota) \\ &\quad S'' = M(S'S\Gamma, e', \iota) \\ &\quad \text{in } S'' \end{aligned}$$

18. 타입 시스템의 안전성을 증명할 때 “Subject Reduction Lemma”를 증명하는데, 그 내용은 타입이 있는 것으로 증명된 프로그램은 값이 아닌 한 항상 스택 실행이 진행될 수 있다는 것이다.

19. 타입 스타일의 프로그램 분석 디자인의 한 예이다. 다루는 프로그램은 call-by-value Lambda Calculus + 정수이고:

$$e \rightarrow n \mid x \mid \lambda x.e \mid e e$$

$\tau$ 는 타입,  $c$ 는 주어진 프로그램의 람다함수식마다 붙은 이름들의 부분집합이다:

$$\tau \rightarrow \iota \mid \tau \xrightarrow{c} \tau \quad c \in 2^{\text{LamLabel}}$$

프로그램의 각 식이 계산중에 호출하는 람다함수식들을 모으는(control-flow analysis) 타입기반 분석 규칙이다:

$$\frac{\overline{\Gamma \vdash n : \iota, \emptyset} \quad \overline{\Gamma \vdash x : \tau, \emptyset} \quad x : \tau \in \Gamma}{\Gamma \vdash e_1 : \iota, c_1 \quad \Gamma \vdash e_2 : \iota, c_2} \quad \frac{\Gamma + x : \tau \vdash e : \tau', c}{\Gamma \vdash e_1 + e_2 : \iota, c_1 \cup c_2} \quad \frac{\Gamma + x : \tau \vdash e : \tau', c}{\Gamma \vdash \lambda x.e : \tau \xrightarrow{c \cup \{x\}} \tau', \emptyset}$$

$$\frac{\Gamma \vdash e_1 : \tau \xrightarrow{c} \tau', c_1 \quad \Gamma \vdash e_2 : \tau, c_2}{\Gamma \vdash e_1 e_2 : \tau', c_1 \cup c_2 \cup c}$$

옳은가?

20. 아래의 규칙들은 옳은가?

$$\frac{\overline{\Gamma \vdash n : \iota, \emptyset} \quad \overline{\Gamma \vdash x : \tau, \emptyset} \quad x : \tau \in \Gamma}{\Gamma \vdash e_1 : \iota, c_1 \quad \Gamma \vdash e_2 : \iota, c_2} \quad \frac{\Gamma + x : \tau \vdash e : \tau', c}{\Gamma \vdash e_1 + e_2 : \iota, c_1 \cup c_2} \quad \frac{\Gamma + x : \tau \vdash e : \tau', c}{\Gamma \vdash \lambda x.e : \tau \xrightarrow{c \cup \{x\}} \tau', \emptyset}$$

$$\frac{\Gamma \vdash e_1 : \tau \xrightarrow{c} \tau', c_1 \quad \Gamma \vdash e_2 : \tau, c_2}{\Gamma \vdash e_1 e_2 : \tau', c_1 \cup c_2 \cup c}$$

$$\frac{\Gamma \vdash e : c}{\Gamma \vdash e : c'} \quad c \subseteq c'$$