

SNU 4541.664A Program Analysis

Note 1

Prof. Kwangkeun Yi

귀납법 = 집합의 정의

집합을 정의하는 방법

- ▶ 되돌아서 return 歸, 바치다 dedicate 納.
- ▶ 그 집합의 원소를 가지고 그 집합의 원소를 만든다.

그 집합은 이것이다

- ▶ 규칙: 가정들 X 와 결론 x .
- ▶ “ X 에 있는 것들이 정의하려는 집합에 모두 있으면, x 도 있어야 한다.”
- ▶ 그러한 집합 중에서 가장 작은 집합.
 - ▶ 규칙 (X, x) 들의 모임을 Φ 라고 하자.
 - ▶ “ Φ 에 대해서 닫혀있는”(Φ -closed), “ Φ -닫힌” 집합 A :

$$(X, x) \in \Phi \text{ 이고 } X \subseteq A \text{ 이면 } x \in A$$

- ▶ Φ 가 정의하는 집합: 모든 Φ -닫힌 집합들의 교집합

$$\bigcap \{A \mid A \text{는 } \Phi\text{-닫힘}\}.$$

자연수의 집합:

$$(\emptyset, 0) \quad (\{n\}, n + 1)$$

영문 소문자 알파벳으로 만들어 지는 스트링의 집합:

$$(\emptyset, \epsilon) \quad (\{\alpha\}, x\alpha \text{ for } x \in \{a, \dots, z\})$$

귀납규칙 표기법

자연수 집합은

$$n \rightarrow 0 \mid n + 1$$

혹은

$$\overline{0} \quad \frac{n}{n+1}$$

위의 스트링 집합은:

$$\alpha \rightarrow \epsilon$$
$$\mid x\alpha \quad (x \in \{\mathbf{a}, \dots, \mathbf{z}\})$$

혹은

$$\overline{\epsilon} \quad \frac{\alpha}{x\alpha} \quad x \in \{\mathbf{a}, \dots, \mathbf{z}\}$$

집합이 유한하다면 재귀가 필요없다. 집합 $\{1, 2, 3\}$ 을 규칙
들로 표현하면

$$(\emptyset, 1) \quad (\emptyset, 2) \quad (\emptyset, 3)$$

혹은

$$x \rightarrow 1 \mid 2 \mid 3$$

혹은

$$\overline{1} \quad \overline{2} \quad \overline{3}$$

가 된다.

리스트의 집합:

$$\overline{\text{nil}} \quad \frac{l}{o-l}$$

혹은

$$l \rightarrow \text{nil} \mid o-l$$

말단에 정수를 가지는 두갈래 나무(binary tree)들의 집합:

$$\overline{n} \quad n \in \mathbb{Z} \qquad \frac{t}{\mathbf{N}(t, \mathbf{nil})}$$

$$\frac{t}{\mathbf{N}(\mathbf{nil}, t)} \qquad \frac{t_1 \quad t_2}{\mathbf{N}(t_1, t_2)}$$

혹은

$$\begin{array}{l} t \rightarrow n \quad (n \in \mathbb{Z}) \\ | \quad \mathbf{N}(t, \mathbf{nil}) \\ | \quad \mathbf{N}(\mathbf{nil}, t) \\ | \quad \mathbf{N}(t, t) \end{array}$$

정수식들의 집합:

$$\frac{n}{n} \quad n \in \mathbb{N} \qquad \frac{e}{-e}$$

$$\frac{e_1 + e_2}{e_1 + e_2} \qquad \frac{e_1 * e_2}{e_1 * e_2}$$

혹은

$$\begin{array}{l} e \rightarrow n \quad (n \in \mathbb{N}) \\ | \quad -e \\ | \quad e + e \\ | \quad e * e \end{array}$$

그 집합은 이렇게 만든다

규칙 집합 Φ 는 함수 ϕ 를 정의:

$$\phi(Y) = \{x \mid \frac{X}{x} \in \Phi, X \subseteq Y\}$$

Φ 규칙들이 정의하는 집합은 함수 ϕ 에 의해서 닫혀있는 집합중에서

$$\bigcap \{X \mid \phi(X) \subseteq X\}$$

이다. 이 집합은 ϕ 의 최소고정점(least fixed point)이다.

이 집합

$$\bigcap \{X \mid \phi(X) \subseteq X\}$$

을 이렇게 만들 수 있다:

$$\phi^0 \cup \phi^1 \cup \phi^2 \cup \dots = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \phi^i$$

여기서

$$\begin{aligned} \phi^0 &= \emptyset \\ \phi^n &= \phi(\phi^{n-1}) \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

자연수 집합 규칙

$$n \rightarrow 0 \mid n + 1$$

그 집합은:

$$\phi^0 = \emptyset$$

$$\phi^1 = \{0\}$$

$$\phi^2 = \{0, 1\}$$

$$\phi^3 = \{0, 1, 2\}$$

...

들의 합집합.

리스트의 집합 규칙

$$l \rightarrow \text{nil} \mid \circ - l$$

그 집합은:

$$\phi^0 = \emptyset$$

$$\phi^1 = \{\text{nil}\}$$

$$\phi^2 = \{\text{nil}, \circ - \text{nil}\}$$

$$\phi^3 = \{\text{nil}, \circ - \text{nil}, \circ - \circ - \text{nil}\}$$

...

들의 합집합.

두갈래 나무(binary tree)의 집합 규칙:

$$\begin{array}{l} t \rightarrow \circ \\ | \quad N(t, \text{nil}) \\ | \quad N(\text{nil}, t) \\ | \quad N(t, t) \end{array}$$

이 집합은:

$$\begin{aligned} \phi^0 &= \emptyset \\ \phi^1 &= \{\circ\} \\ \phi^2 &= \{\circ, N(\circ, \text{nil}), N(\text{nil}, \circ), N(\circ, \circ)\} \\ \dots & \end{aligned}$$

들의 합집합.

스트링 집합 규칙:

$$\begin{array}{l} \alpha \rightarrow \epsilon \\ | \quad x\alpha \quad (x \in \{\mathbf{a}, \dots, \mathbf{z}\}) \end{array}$$

이 집합은

$$\begin{aligned} \phi^0 &= \emptyset \\ \phi^1 &= \{\epsilon\} \\ \phi^2 &= \{\epsilon, \mathbf{a}\epsilon, \dots, \mathbf{z}\epsilon\} \\ &\dots \end{aligned}$$

들의 합집합.

밑바닥 없는 규칙

집합 규칙:

$$\begin{array}{l} t \rightarrow N(t, \text{nil}) \\ | \quad N(\text{nil}, t) \\ | \quad N(t, t) \end{array}$$

이 집합은 \emptyset :

$$\phi^0 = \phi^1 = \dots = \emptyset$$

모든 귀납 규칙

$$\frac{X}{x}$$

에서 $X \neq \emptyset$ 이면 정의하는 집합은 \emptyset

정리

- ▶ 귀납법 = 집합의 정의 inductive definition
- ▶ 표현 방법들
- ▶ 그 집합은 무엇이지?
 - ▶ “닫혀있는 최소의 집합”
 - ▶ $\bigcap \{A \mid A \text{는 } \Phi\text{-닫힘}\}$
- ▶ 그 집합은 어떻게 만들지?
 - ▶ “ \emptyset 에서 출발해서, 규칙이 만드는 원소들만을 빠짐없이 첨가”
 - ▶ $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \phi^i$

계획

- ▶ 귀납법 = 증명 proof by induction
 - ▶ 원소의 순서
 - ▶ “모든 원소들” = “모든 순서의 원소들”
- ▶ 형식논리와 추론
 - ▶ 논리식 집합의 정의 (귀납법)
 - ▶ 논리식 의미의 정의 (조립식)
 - ▶ 참논리식 집합의 정의 (귀납법)
 - ▶ 참논리식 추론의 방법 (귀납법)
 - ▶ 추론방법 평가하기

원소들의 순서

귀납적으로 정의된 집합 S

- ▶ ϕ^i 번째에 새롭게 만들어 지는 원소: i 번째 원소.
- ▶ 0 번째에 만들어진 원소들이 씨.
- ▶ “기초가 튼튼한 순서(*well-founded order*)”
- ▶ 귀납적으로 정의된 집합은 기초가 튼튼한 순서를 가지고 있다.

귀납법 = 증명의 방법

증명 목표:

$$\forall x \in S. P(x)$$

- ▶ S 가 귀납적으로 정의됨, 즉, 모든 원소들의 순서가 있음.
- ▶ P (0번째 원소)를 증명: 항상 성립
- ▶ 임의의 $i > 0$ 에 대해서

$$(\forall j < i. P(j\text{번째 원소})) \Rightarrow P(i\text{번째 원소})$$

를 증명.

(“대우법 증명”도 있음)

귀납 증명: 규칙들에 대한 것으로

임의의 $i > 0$ 에 대해서

$$(\forall j < i. P(j\text{번째 원소})) \Rightarrow P(i\text{번째 원소})$$

를 증명.

- ▶ case $i = 1$: $P(1\text{번째 원소})$ 증명
- ▶ case $i > 1$: $(\forall j < i. P(j\text{번째 원소})) \Rightarrow P(i\text{번째 원소})$ 증명

즉,

- ▶ “base case”: 규칙 $\frac{}{x}$ 가 만드는 x 들에 대해, $P(x)$ 증명.
- ▶ “inductive case”: 규칙 $\frac{x}{x}$ 가 만드는 x 들에 대해, $(\forall a \in X. P(a)) \Rightarrow P(x)$ 를 증명.

귀납증명 예

- ▶ 증명: $\forall n \in \mathbb{N}. 0 + 1 + 2 + \dots + n = n(n + 1)/2$
- ▶ 증명: 모든 두갈래가 꽉찬 나무(*complete binary tree*)는 말단 노드의 갯수가 내부 노드의 갯수와 같거나 하나 많다.

$$t \rightarrow \circ \mid \mathbf{N}(t, t)$$

논리식 집합

귀납적 정의

$$\begin{array}{l} f \rightarrow T \mid F \\ | \neg f \\ | f \wedge f \\ | f \vee f \\ | f \Rightarrow f \end{array}$$

논리식 의미

조합식 정의 compositional definition

$$\begin{aligned} \llbracket T \rrbracket &= \text{true} \\ \llbracket F \rrbracket &= \text{false} \\ \llbracket \neg f \rrbracket &= \text{not} \llbracket f \rrbracket \\ \llbracket f_1 \wedge f_2 \rrbracket &= \llbracket f_1 \rrbracket \text{ andalso } \llbracket f_2 \rrbracket \\ \llbracket f_1 \vee f_2 \rrbracket &= \llbracket f_1 \rrbracket \text{ orelse } \llbracket f_2 \rrbracket \\ \llbracket f_1 \Rightarrow f_2 \rrbracket &= \llbracket f_1 \rrbracket \text{ implies } \llbracket f_2 \rrbracket \end{aligned}$$

임의의 논리식 f 의 의미가 정의 된 셈.

$\llbracket (T \wedge (T \vee F)) \Rightarrow F \rrbracket$
= $\llbracket T \wedge (T \vee F) \rrbracket$ implies $\llbracket F \rrbracket$
= ($\llbracket T \rrbracket$ andalso $\llbracket T \vee F \rrbracket$) implies false
= (true andalso ($\llbracket T \rrbracket$ orelse $\llbracket F \rrbracket$)) implies false
= (true andalso (true orelse false)) implies false
= false

어떤 집합의 정의

쌍 $(\{g_1, \dots, g_n\}, f)$ 들의 집합

$$\frac{}{(\Gamma, T)} \quad \frac{}{(\Gamma, f)} \quad f \in \Gamma$$

$$\frac{(\Gamma, F)}{(\Gamma, f)} \quad \frac{(\Gamma, \neg\neg f)}{(\Gamma, f)}$$

$$\frac{(\Gamma, f_1) \quad (\Gamma, f_2)}{(\Gamma, f_1 \wedge f_2)}$$

$$\frac{(\Gamma, f_1 \wedge f_2)}{(\Gamma, f_1)}$$

$$\frac{(\Gamma, f_1)}{(\Gamma, f_1 \vee f_2)}$$

$$\frac{(\Gamma, f_1 \vee f_2) \quad (\Gamma, f_1 \vee f_2)}{(\Gamma \cup \{f_1\}, f_3) \quad (\Gamma \cup \{f_2\}, f_3)} \\ \frac{}{(\Gamma, f_3)}$$

$$\frac{(\Gamma \cup \{f_1\}, f_2)}{(\Gamma, f_1 \Rightarrow f_2)}$$

$$\frac{(\Gamma, f_1 \Rightarrow f_2) \quad (\Gamma, f_1)}{(\Gamma, f_2)}$$

$$\frac{(\Gamma \cup \{f\}, F)}{(\Gamma, \neg f)}$$

$$\frac{(\Gamma, f) \quad (\Gamma, \neg f)}{(\Gamma, F)}$$

형식논리의 표기법으로

$$\overline{\Gamma \vdash T} \quad \overline{\Gamma \vdash f} \quad f \in \Gamma$$

$$\frac{\Gamma \vdash F}{\Gamma \vdash f} \quad \frac{\Gamma \vdash \neg\neg f}{\Gamma \vdash f}$$

$$\frac{\Gamma \vdash f_1 \quad \Gamma \vdash f_2}{\Gamma \vdash f_1 \wedge f_2}$$

$$\frac{\Gamma \vdash f_1 \wedge f_2}{\Gamma \vdash f_1}$$

$$\frac{\Gamma \vdash f_1}{\Gamma \vdash f_1 \vee f_2}$$

$$\frac{\Gamma \vdash f_1 \vee f_2 \quad \Gamma \cup \{f_1\} \vdash f_3 \quad \Gamma \cup \{f_2\} \vdash f_3}{\Gamma \vdash f_3}$$

$$\frac{\Gamma \cup \{f_1\} \vdash f_2}{\Gamma \vdash f_1 \Rightarrow f_2}$$

$$\frac{\Gamma \vdash f_1 \Rightarrow f_2 \quad \Gamma \vdash f_1}{\Gamma \vdash f_2}$$

$$\frac{\Gamma \cup \{f\} \vdash F}{\Gamma \vdash \neg f}$$

$$\frac{\Gamma \vdash f \quad \Gamma \vdash \neg f}{\Gamma \vdash F}$$

또 다른 시선: 증명들의 집합을 정의

증명들의 집합을 만드는 귀납규칙 (“증명규칙” inference rules).

- ▶ 예를 들어, 증명규칙

$$\frac{\Gamma \vdash f_1 \quad \Gamma \vdash f_2}{\Gamma \vdash f_1 \wedge f_2}$$

은 증명을 만드는 귀납 규칙

- ▶ $\Gamma \vdash f_1$ 와 $\Gamma \vdash f_2$ 의 증명들을 가지고 $\Gamma \vdash f_1 \wedge f_2$ 의 증명을 만든다.

증명 나무

$$\frac{\frac{\frac{\overline{\{p \rightarrow \neg p, p\} \vdash p}}{\{p \rightarrow \neg p, p\} \vdash p} \quad \frac{\overline{\{p \rightarrow \neg p, p\} \vdash p \rightarrow \neg p} \quad \overline{\{p \rightarrow \neg p, p\} \vdash p}}{\{p \rightarrow \neg p, p\} \vdash \neg p}}{\{p \rightarrow \neg p, p\} \vdash F}}{\{p \rightarrow \neg p\} \vdash \neg p}}$$

증명 규칙의 평가

기계가 만드는 $\{g_1, \dots, g_n\} \vdash f$ 는 어떤 것들인가? 예)
 $\llbracket g_1 \wedge \dots \wedge g_n \Rightarrow f \rrbracket = \text{true}$ 인가?

- ▶ 기계의 안전성 soundness:

$$\Gamma \vdash f \text{ 이면 } \llbracket \Gamma \Rightarrow f \rrbracket = \text{true}$$

- ▶ 기계의 완전성 completeness:

$$\Gamma \vdash f \text{ 면이 } \llbracket \Gamma \Rightarrow f \rrbracket = \text{true}$$