SNU 4541.664A Program Analysis Note 11

Prof. Kwangkeun Yi

$$\underbrace{\underbrace{x \ \texttt{:=}\ 1}_{1} \ ;\ \underbrace{\texttt{while}\ (0 \ \texttt{<}\ x)\ \underbrace{x\ \texttt{:=}\ \underbrace{x\ \texttt{+}\ 1}_{4}}_{3}}_{2}}_{0}$$

$\hat{\mathbb{Z}}$의 높이가 무한한 경우

$$\hat{\mathbb{Z}} = \{\perp\} \cup \{[a,b] \mid a \le b,\ a,b \in \mathbb{Z} \cup \{\infty, -\infty\}\}$$

일 때, 방정식은:

$$\begin{array}{rcl}
\hat{X}_0 & = & \lambda\hat{m}.\hat{X}_2(\hat{X}_1\ \hat{m}) \\
\hat{X}_1 & = & \lambda\hat{m}.\hat{m}\{x \mapsto [1,1]\} \\
\hat{X}_2 & = & \lambda\hat{m}.\hat{m} \sqcup (\hat{X}_2\ (\hat{X}_3\ \hat{m})) \\
\hat{X}_3 & = & \lambda\hat{m}.\hat{m}\{x \mapsto (\hat{m}\ x)\ \hat{+}\ [1,1]\}
\end{array}$$

프로그램 시작점에서의 모든 메모리 상태를 포섭하는 것이

$$\{\} \in \hat{Memory} = Var \xrightarrow{\text{fin}} \hat{Value}$$

라고하면,

$$\hat{X}_0\ \{\}$$

에서 부터 "연쇄반응"을 일으키는 방정식들만 풀면 된다.

따라서 풀어야 할 방정식들:

$$
\begin{array}{rcl}
\hat{X}_0\,\{\} &=& \hat{X}_2(\hat{X}_1\,\{\}) \quad \text{따라서} \\
\hat{X}_1\,\{\} &=& \{x \mapsto [1,1]\} \quad \text{따라서} \\
\hat{X}_2\,\{x \mapsto [1,1]\} &=& \{x \mapsto [1,1]\} \sqcup (\hat{X}_2\,(\hat{X}_3\,\{x \mapsto [1,1]\})) \quad \text{따라서} \\
\hat{X}_3\,\{x \mapsto [1,1]\} &=& \{x \mapsto [1,1] \hat{+} [1,1]\} \quad \text{따라서} \\
\hat{X}_2\,\{x \mapsto [2,2]\} &=& \{x \mapsto [2,2]\} \sqcup (\hat{X}_2\,(\hat{X}_3\,\{x \mapsto [2,2]\})) \quad \text{따라서} \\
\hat{X}_3\,\{x \mapsto [2,2]\} &=& \{x \mapsto [3,3]\} \quad \text{따라서} \\
\hat{X}_2\,\{x \mapsto [3,3]\} &=& \cdots \\
\hat{X}_3\,\{x \mapsto [3,3]\} &=& \cdots \\
&\vdots&
\end{array}
$$

풀어야 할 방정식이 무한히 많아짐.

방정식의 재구성: 요약, 요약, 요약

명령문 C_k의 요약의미

$$\hat{X}_k \in Me\hat{m}ory \to Me\hat{m}ory$$

중에서

- 관심있는 메모리들에 대한 경우만을 추려 낸 방정식들

$$\begin{array}{rcl}\hat{X}_k\ \hat{m}_1 & = & RHS_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \hat{X}_k\ \hat{m}_n & = & RHS_n\end{array}$$

  은 요약의미를 공간

$$2^{Me\hat{m}ory \times Me\hat{m}ory}$$

  에서 구하는 셈.
- 한번 더 나아가, 위의 방정식을 하나의 방정식

$$\hat{X}_k\ (\bigsqcup_{i=1,\cdots,n} \hat{m}_i) = \bigsqcup_{i=1,\cdots,n} RHS_i.$$

  으로 추리는 것은 요약의미를 공간

$$Me\hat{m}ory \times Me\hat{m}ory$$

  에서 구하는 셈. 단, $Me\hat{m}ory$가 $\sqcup$−$complete$해야.

방정식의 재구성

단수를 낮추어서

$$\begin{array}{lcll} \hat{X}_i^{\uparrow} & \in & \hat{Memory} & \text{명령문 } i\text{의 출력} \\ \hat{X}_i^{\downarrow} & \in & \hat{Memory} & \text{명령문 } i\text{의 입력} \end{array}$$

에 대한 방정식으로 재구성 할 수 있다.
방정식의 갯수 $= O($프로그램 사이즈$)$.

아래 방정식으로 부터

$$
\begin{array}{rcl}
\hat{X}_0 & = & \lambda\hat{m}.\hat{X}_2(\hat{X}_1\,\hat{m}) \\
\hat{X}_1 & = & \lambda\hat{m}.\hat{m}\{x \mapsto [1,1]\} \\
\hat{X}_2 & = & \lambda\hat{m}.\hat{m} \sqcup (\hat{X}_2\,(\hat{X}_3\,\hat{m})) \\
\hat{X}_3 & = & \lambda\hat{m}.\hat{m}\{x \mapsto (\hat{m}\,x) \hat{+} [1,1]\}
\end{array}
$$

다음을 유도할 수 있다:

$$
\begin{array}{rcl}
\hat{X}_0^{\downarrow} & = & \{\} \\
\hat{X}_1^{\downarrow} & = & \hat{X}_0^{\downarrow} \\
\hat{X}_2^{\downarrow} & = & \hat{X}_1^{\uparrow} \sqcup \hat{X}_3^{\uparrow} \\
\hat{X}_3^{\downarrow} & = & \hat{X}_2^{\downarrow}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
\hat{X}_0^{\uparrow} & = & \hat{X}_2^{\uparrow} \\
\hat{X}_1^{\uparrow} & = & \hat{X}_1^{\downarrow}\{x \mapsto [1,1]\} \\
\hat{X}_2^{\uparrow} & = & \hat{X}_2^{\downarrow} \sqcup \hat{X}_2^{\uparrow} \\
\hat{X}_3^{\uparrow} & = & \hat{X}_3^{\downarrow}\{x \mapsto (\hat{X}_3^{\downarrow}\,x) \hat{+} [1,1]\}
\end{array}
$$

위의 방정식을 다시쓰면

$$\begin{pmatrix} \hat{X}_0^{\uparrow}, \cdots \hat{X}_3^{\uparrow} \\ \hat{X}_0^{\downarrow}, \cdots \hat{X}_3^{\downarrow} \end{pmatrix} = \hat{\mathcal{G}}_C \begin{pmatrix} \hat{X}_0^{\uparrow}, \cdots \hat{X}_3^{\uparrow} \\ \hat{X}_0^{\downarrow}, \cdots \hat{X}_3^{\downarrow} \end{pmatrix}$$

- $\hat{\mathcal{G}}_C$는 $\hat{\mathcal{F}}_C$를 그대로 반영하고, 그 밖으로는 $\sqcup_{\hat{Memory}}$ 연산뿐.
- 위 방정식의 해는 연속함수 $\hat{\mathcal{G}}_C$의 최소 고정점.
- 그 해는, $\mathcal{F}_C$로 부터 같은 방법으로 재구성한 $\mathcal{G}_C$의 최소 고정점을 포섭; $\alpha(lfp\mathcal{F}_C) \sqsubseteq lfp\hat{\mathcal{F}}_C$ 이므로.

허나, 최소 고정점 $\sqcup_i \hat{\mathcal{G}}_C^i \hat{\bot}$ 계산은 끝나지 않음; $\hat{\mathbb{Z}}$의 높이가 무한.

$$
\begin{array}{rcl}
\hat{Memory} & = & Var \xrightarrow{\text{fin}} \hat{\mathbb{Z}} \\
\hat{m}_1 \sqsubseteq \hat{m}_2 & \stackrel{\text{def}}{=} & \forall x \in dom(\hat{m}_1) \cup dom(\hat{m}_2) : \hat{m}_1\, x \sqsubseteq \hat{m}_2\, x \\
\forall x \notin dom(\hat{m}) : \hat{m}\, x & \stackrel{\text{def}}{=} & \bot_{\hat{\mathbb{Z}}}
\end{array}
$$

(메모리에서 x 값만 표시)

$\hat{\mathcal{G}}_C^i \hat{\bot}, \quad i = 1, 2, \cdots$								
	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
$\hat{X}_2^{\downarrow}$		[1,1]	[1,1]	[1,1]	[1,2]	[1,2]	[1,3]	$\cdots$
$\hat{X}_3^{\downarrow}$			[1,1]	[1,1]	[1,1]	[1,2]	[1,2]	$\cdots$
$\hat{X}_0^{\uparrow}$				[1,1]	[1,1]	[1,1]	[1,2]	$\cdots$
$\hat{X}_1^{\uparrow}$	[1,1]	[1,1]	[1,1]	[1,1]	[1,1]	[1,1]	[1,1]	$\cdots$
$\hat{X}_2^{\uparrow}$			[1,1]	[1,1]	[1,1]	[1,2]	[1,3]	$\cdots$
$\hat{X}_3^{\uparrow}$				[2,2]	[2,2]	[2,3]	[2,3]	$\cdots$

계속 증가하는 $\hat{\mathcal{G}}_C^i \hat{\bot}$

$$\left(\begin{array}{c}\hat{X}_0^{\uparrow},\cdots,\hat{X}_3^{\uparrow}\\ \hat{X}_0^{\downarrow},\cdots,\hat{X}_3^{\downarrow}\end{array}\right) = \hat{\mathcal{G}}_C\left(\begin{array}{c}\hat{X}_0^{\uparrow},\cdots,\hat{X}_3^{\uparrow}\\ \hat{X}_0^{\downarrow},\cdots,\hat{X}_3^{\downarrow}\end{array}\right)$$

위의 해를 포섭하는 것을 유한번만에 계산하려면 축지법(*widenning*)($\triangledown$)을 쓴 $\{\hat{Y}_i\}_i$을 계산해야:

$$\begin{array}{rcl}\hat{Y}_0 & = & \hat{\bot}\\ \hat{Y}_{i+1} & = & \begin{cases}\hat{Y}_i & \text{if } \hat{\mathcal{G}}_C(\hat{Y}_i) \sqsubseteq \hat{Y}_i\\ \hat{Y}_i \triangledown \hat{\mathcal{G}}_C(\hat{Y}_i) & \text{otherwise}\end{cases}\end{array}$$

- 유한한 체인 $\{\hat{Y}_i\}_i$의 끝 $\lim_i \hat{Y}_i$은 $\sqcup_i \hat{\mathcal{G}}_C^i \hat{\bot}$을 포섭 (Theorem [widen's safety])
- $\lim_i \hat{Y}_i$를 좁히기(*narrowing*)($\triangle$)로 다듬고: 좁힌 결과도 $\sqcup_i \hat{\mathcal{G}}_C^i \hat{\bot}$를 포섭 (Theorem [narrow's safety])

$\triangledown$ 과 $\triangle$의 예

$$
\begin{array}{rcl}
\bot \triangledown X & = & X \\
X \triangledown \bot & = & X \\
[l,u] \triangledown [l',u'] & = & [(l' < l ? \; -\infty : \; l), \; (u' > l ? \; \infty : \; u)]
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
\bot \triangle X & = & \bot \\
X \triangle \bot & = & \bot \\
[l,u] \triangle [l',u'] & = & [(l = -\infty \, ? \, l' \; : \; l), \; (u = \infty \, ? \, u' \; : \; u)]
\end{array}
$$

읽기: “Comparing the Galois Connection and Widening/Narrowing Approaches to Abstract Interpretation”

축지법으로 뛰는 체인 $\{\hat{Y}_i\}_i$:

$$\begin{array}{rcl} \hat{Y}_0 & = & \hat{\bot} \\ \hat{Y}_{i+1} & = & \begin{cases} \hat{Y}_i & \text{if } \hat{\mathcal{G}}_C(\hat{Y}_i) \sqsubseteq \hat{Y}_i \\ \hat{Y}_i \bigtriangledown \hat{\mathcal{G}}_C(\hat{Y}_i) & \text{otherwise} \end{cases} \end{array}$$

(메모리에서 x 값만 표시)

$\hat{Y}_i, \quad i = 3, 4, \cdots$					
	3	4	5	6	7
$\hat{X}_2^{\downarrow}$	[1,1]	[1,1]	$\bigtriangledown$[1,2]=[1,∞]	[1,∞]	[1,∞]
$\hat{X}_3^{\downarrow}$	[1,1]	[1,1]	[1,1]	$\bigtriangledown$[1,∞]=[1,∞]	[1,∞]
$\hat{X}_0^{\uparrow}$		[1,1]	[1,1]	[1,1]	$\bigtriangledown$[1,∞]=[1,∞]
$\hat{X}_1^{\uparrow}$	[1,1]	[1,1]	[1,1]	[1,1]	[1,1]
$\hat{X}_2^{\uparrow}$	[1,1]	[1,1]	[1,1]	$\bigtriangledown$[1,∞]=[1,∞]	[1,∞]
$\hat{X}_3^{\uparrow}$		[2,2]	[2,2]	$\bigtriangledown$[2,3]=[2,∞]	[2,∞]

$\lim_i \hat{Y}_i = \hat{Y}_7$.

좁히기로 잰걸음하는 체인 $\{\hat{Z}_i\}_i$:

$$\begin{array}{rcl}\hat{Z}_0 & = & \lim_i \hat{Y}_i \\ \hat{Z}_{i+1} & = & \hat{Z}_i \bigtriangleup \hat{\mathcal{G}}_C(\hat{Z}_i)\end{array}$$

(메모리에서 x 값만 표시)

$\hat{Z}_i,\quad i = 0, 1, \cdots$		
	0	1
$\hat{X}_2^{\downarrow}$	[1,∞]	[1,∞]
$\hat{X}_3^{\downarrow}$	[1,∞]	[1,∞]
$\hat{X}_0^{\uparrow}$	[1,∞]	[1,∞]
$\hat{X}_1^{\uparrow}$	[1,1]	[1,1]
$\hat{X}_2^{\uparrow}$	[1,∞]	[1,∞]
$\hat{X}_3^{\uparrow}$	[2,∞]	[2,∞]

$\lim_i \hat{Z}_i = Z_1$ (그리고 더 좋아지는 건 없음).

$\triangle$가 효과를 발휘하는 예

$$\hat{\mathcal{C}}\,\texttt{while}\ E\ C\ \hat{m} = \hat{m} \sqcup (\hat{\mathcal{C}}\,\texttt{while}\ E\ C\ (\hat{\mathcal{C}}\ C\ (\hat{m} \sqcap \mathit{True}(E))))$$

이면, 프로그램 $\underbrace{x := 1\ ;\ \texttt{while}\ (x < 11)\ \underbrace{x := x + 1}_{3}}_{2}$ 에 대한 $\hat{X}_3^{\downarrow}$의

방정식은 $\hat{X}_3^{\downarrow} = \hat{X}_2^{\downarrow} \sqcap [-\infty, 10]$.

축지법 과정은:

	4	5	6
$\hat{X}_2^{\downarrow}$	[1,1]	$\bigtriangledown$ [1,2] =[1,∞]	[1,∞]
$\hat{X}_3^{\downarrow}$	[1,1]	[1,1]	$\bigtriangledown$[1,10] = [1,∞]

좁히기 과정은:

	0	1
$\hat{X}_2^{\downarrow}$	[1,∞]	
$\hat{X}_3^{\downarrow}$	[1,∞]	$\triangle$[$-\infty$,10]=[1,10]

$$
\begin{array}{rcll}
E & \to & n & (n \in \mathbb{Z}) \\
& | & E \texttt{ + } E & \\
& | & \texttt{-}\, E & \\
& | & x & \text{변수} \\
& | & f\lambda x.E & \text{재귀 함수} \\
& | & E\ E & \text{함수 호출}
\end{array}
$$

의미함수

$$\mathcal{V} : \mathit{Exp} \to 2^{\mathit{Env}} \to 2^{\mathit{Val}}$$

의미공간

$$
\begin{array}{rcl}
\sigma \in \mathit{Env} & = & \mathit{Var} \xrightarrow{\text{fin}} \mathit{Val} \\
\mathit{Val} & = & \mathbb{Z} + \mathit{Closure} \\
\mathit{Closure} & = & \mathit{Exp} \times \mathit{Env}
\end{array}
$$

환경에서 변수관계 무시

$$2^{Env} \underset{\alpha}{\overset{\gamma}{\rightleftarrows}} Var \xrightarrow{\text{fin}} 2^{Val}$$

즉, 의미공간

$$\begin{array}{rcl} \sigma \in Env & = & Var \xrightarrow{\text{fin}} Val \\ Val & = & 2^{\mathbb{Z}} + 2^{Closure} \\ Closure & = & Exp \times Env \end{array}$$

의미함수

$$\mathcal{V} : Exp \to Env \to Val$$

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{V}\, n\, \sigma & = & \{n\} \\ \mathcal{V}\, x\, \sigma & = & \sigma\, x \\ \mathcal{V}\, E_1 \texttt{+} E_2\, \sigma & = & (\mathcal{V}\, E_1\, \sigma) \dot{+} (\mathcal{V}\, E_2\, \sigma) \\ \mathcal{V}\, \texttt{-} E\, \sigma & = & \dot{-}(\mathcal{V}\, E\, \sigma) \\ \mathcal{V}\, f \lambda x.E\, \sigma & = & \{\langle f \lambda x.E, \sigma \rangle\} \\ \mathcal{V}\, E_1\, E_2\, \sigma & = & \cup\{\mathcal{V}\, E\, \sigma'\{x \mapsto \mathcal{V}\, E_2\, \sigma\}\{f \mapsto \{\langle f \lambda x.E, \sigma' \rangle\}\} \\ & & \mid \langle f \lambda x.E, \sigma' \rangle \in \mathcal{V}\, E_1\, \sigma\} \end{array}$$

주의

프로그램 E의 의미 $\mathcal{V}\ E$를 정의하는가?
E가 재귀함수를 호출하고 그 함수내에 재귀호출 "$f\ E'$"이 있는 경우:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{V}\ E & = & \cdots \mathcal{V}\ f\ E' \cdots \\ & = & \cdots (\cdots \mathcal{V}\ f\ E' \cdots) \cdots \\ & = & \cdots \end{array}$$

$\mathcal{V}$은 E를 가지고 만드는 방정식을 표현하는 것 뿐.
그 방정식의 해가 프로그램의 E의 의미 $\mathcal{V}\,E$.
식 E의 방정식을 만들어주는 함수

$$\mathcal{F} : (Exp \to Env \to Val) \to (Exp \to Env \to Val)$$

는 다름아니라:

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{F}\,\mathcal{V}\,n\,\sigma & = & \{n\} \\
\mathcal{F}\,\mathcal{V}\,x\,\sigma & = & \sigma\,x \\
\mathcal{F}\,\mathcal{V}\,E_1 \texttt{+} E_2\,\sigma & = & \{z_1 + z_2 \mid z_i \in \mathcal{V}\,E_i\,\sigma\} \\
\mathcal{F}\,\mathcal{V}\,\texttt{-}\,E\,\sigma & = & \{-z \mid z \in \mathcal{V}\,E\,\sigma\} \\
\mathcal{F}\,\mathcal{V}\,f\lambda x.E\,\sigma & = & \{\langle f\lambda x.E, \sigma\rangle\} \\
\mathcal{F}\,\mathcal{V}\,E_1\,E_2\,\sigma & = & \cup\{\mathcal{V}\,E\,\sigma'\{x \mapsto \mathcal{V}\,E_2\,\sigma\}\{f \mapsto \langle f\lambda x.E, \sigma'\rangle\} \\
 & & \quad \mid \langle f\lambda x.E, \sigma'\rangle \in \mathcal{V}\,E_1\,\sigma\}
\end{array}$$

프로그램 E의 의미는 그 의미 $\mathcal{V}\,E$에 대한 방정식

$$\mathcal{V}\,E = \mathcal{F}\,\mathcal{V}\,E$$

과 E안의 모든 식 E_i들의 의미 $\mathcal{V}\,E_i$에 대한 방정식

$$\mathcal{V}\,E_i = \mathcal{F}\,\mathcal{V}\,E_i$$

들의 해를 가지고 정의됨.
그 연립방정식을 하나의 함수 $\mathcal{F}_E$를 이용해서 표현하면

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \mathcal{F}_E \begin{pmatrix} X_0 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

이 되고, 방정식의 주인공 X_i는 $\mathcal{V}\,E_i$대신에 쓴 것이고, 프로그램 E의 모든 하부 식들은 n개. ($\mathcal{F}_E$의 정의는 $\mathcal{F}$로 부터 명백)

다음 프로그램

$$1 \texttt{+} (k\lambda x.k\ (\texttt{-}\ x))\ 0$$

을 생각하자. 위 프로그램의 모든 부품식들마다 번호를 붙이자.

$$\underbrace{\underbrace{1}_{1}\ \texttt{+}\ \underbrace{(\underbrace{(k\lambda x.\underbrace{\underbrace{k}_{6}\ \underbrace{(\texttt{-}\ \underbrace{x}_{8})}_{7}}_{5})}_{3}\ \underbrace{0}_{4})}_{2}}_{0}$$

각 프로그램 식 E_i에 대해서 방정식

$$\mathcal{V}\ E_i = \mathcal{F}\ \mathcal{V}\ E_i$$

을 모은 연립방정식은

$$
\begin{aligned}
\mathcal{V}\ E_0 &= \lambda\sigma.\{z_1 + z_2 \mid z_1 \in \mathcal{V}\ E_1\ \sigma, z_2 \in \mathcal{V}\ E_2\ \sigma\} \\
\mathcal{V}\ E_1 &= \lambda\sigma.\{1\} \\
\mathcal{V}\ E_2 &= \lambda\sigma. \cup \{\mathcal{V}\ E\ \sigma'\{x \mapsto \mathcal{V}\ E_4\ \sigma\}\{f \mapsto \langle f \lambda x.E, \sigma'\rangle\} \\
&\qquad \mid \langle f \lambda x.E, \sigma'\rangle \in \mathcal{V}\ E_3\ \sigma\} \\
\mathcal{V}\ E_3 &= \lambda\sigma.\{\langle k\lambda x.E_5, \sigma\rangle\} \\
\mathcal{V}\ E_4 &= \lambda\sigma.\{0\} \\
\mathcal{V}\ E_5 &= \lambda\sigma. \cup \{\mathcal{V}\ E\ \sigma'\{x \mapsto \mathcal{V}\ E_7\ \sigma\}\{f \mapsto \langle f \lambda x.E, \sigma'\rangle\} \\
&\qquad \mid \langle f \lambda x.E, \sigma'\rangle \in \mathcal{V}\ E_6\ \sigma\} \\
\mathcal{V}\ E_6 &= \lambda\sigma.\sigma\ k \\
\mathcal{V}\ E_7 &= \lambda\sigma.\{-z \mid z \in \mathcal{V}\ E_8\ \sigma\} \\
\mathcal{V}\ E_8 &= \lambda\sigma.\sigma\ x
\end{aligned}
$$

방정식의 주인공을 $\mathcal{V}\, E_i$ 대신에 X_i로 다시쓰면:

$$
\begin{array}{rcl}
X_0 &=& \lambda\sigma.\{z_1 + z_2 \mid z_1 \in X_1\,\sigma, z_2 \in X_2\,\sigma\} \\
X_1 &=& \lambda\sigma.\{1\} \\
X_2 &=& \lambda\sigma.\cup\{X_E\,\sigma'\{x \mapsto X_4\,\sigma\}\{f \mapsto \langle f\lambda x.E, \sigma'\rangle\} \\
 & & \quad \mid \langle f\lambda x.E, \sigma'\rangle \in X_3\,\sigma\} \\
X_3 &=& \lambda\sigma.\{\langle k\lambda x.X_5, \sigma\rangle\} \\
X_4 &=& \lambda\sigma.\{0\} \\
X_5 &=& \lambda\sigma.\cup\{X_E\,\sigma'\{x \mapsto X_7\,\sigma\}\{f \mapsto \langle f\lambda x.E, \sigma'\rangle\} \\
 & & \quad \mid \langle f\lambda x.E, \sigma'\rangle \in X_6\,\sigma\} \\
X_6 &=& \lambda\sigma.\sigma\,k \\
X_7 &=& \lambda\sigma.\{-z \mid z \in X_8\,\sigma\} \\
X_8 &=& \lambda\sigma.\sigma\,x
\end{array}
$$

- 특이점: 방정식의 주인공들이 완전히 드러나지 않음. X_2의 방정식을 보면, "X_E"에서 E의 정체는 X_3의 해가 밝혀질 때 알 수 있음.

$$\text{“}\langle f\,\lambda x.E, \sigma'\rangle \in X_3\,\sigma\text{”}$$

- 함수가 자유롭게 흘러다닐 수 있는(*higher-order*) 언어인 경우 생기는 현상.
  혹은, "if the language has the control a first-class object."

$lfp\mathcal{F}_E$ 는 $lfp\mathcal{F}$의 일부분

방정식의 해

$$lfp\hat{\mathcal{F}}_E$$

는

$$lfp\hat{\mathcal{F}} \in Exp \rightarrow Env \rightarrow Val$$

중에서 프로그램 E를 구성하는 식들의 의미들로 구성된다:

$$lfp\hat{\mathcal{F}}_E = \langle (lfp\hat{\mathcal{F}})\ E_0, (lfp\hat{\mathcal{F}})\ E_1, \cdots, (lfp\hat{\mathcal{F}})\ E_n \rangle$$

요약공간

$$
\begin{array}{rcl}
\hat{\sigma} \in \widehat{Env} & = & Var \xrightarrow{\text{fin}} \widehat{Val} \\
\widehat{Val} & = & \hat{\mathbb{Z}} + \widehat{Closure} \\
\widehat{Closure} & = & 2^{Exp}
\end{array}
$$

프로그램 E 의 요약 의미는 연속함수 $\hat{\mathcal{F}}$ 가 E로 부터 만들어 내는 연립방정식

$$
\begin{pmatrix} X_0 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \hat{\mathcal{F}}_E \begin{pmatrix} X_0 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}
$$

의 해.

$$\hat{\mathcal{F}} \in (Exp \to \hat{Env} \to \hat{Val}) \to (Exp \to \hat{Env} \to \hat{Val})$$

$$\begin{array}{rcl}
\hat{\mathcal{F}}\ \hat{\mathcal{V}}\ n\ \hat{\sigma} & = & \alpha_2\ \{n\} \\
\hat{\mathcal{F}}\ \hat{\mathcal{V}}\ x\ \hat{\sigma} & = & \hat{\sigma}\ x \\
\hat{\mathcal{F}}\ \hat{\mathcal{V}}\ E_1 \texttt{+} E_2\ \hat{\sigma} & = & (\hat{\mathcal{V}}\ E_1\ \hat{\sigma}) \hat{+} (\hat{\mathcal{V}}\ E_2\ \hat{\sigma}) \\
\hat{\mathcal{F}}\ \hat{\mathcal{V}}\ \texttt{-}\ E\ \hat{\sigma} & = & \ominus(\hat{\mathcal{V}}\ E\ \hat{\sigma}) \\
\hat{\mathcal{F}}\ \hat{\mathcal{V}}\ \lambda x.E\ \hat{\sigma} & = & \{\lambda x.E\} \\
\hat{\mathcal{F}}\ \hat{\mathcal{V}}\ E_1\ E_2\ \hat{\sigma} & = & \sqcup\{\hat{\mathcal{V}}\ E\ \hat{\sigma}\{x \mapsto \hat{\sigma}\ x \cup \hat{\mathcal{V}}\ E_2\ \hat{\sigma}\} \mid \lambda x.E \in \hat{\mathcal{V}}\ E_1\ \hat{\sigma}\}
\end{array}$$

- $\hat{\mathcal{F}}$는 연속 함수이므로, $\hat{\mathcal{F}}_E$도 연속함수. 따라서, $\mathit{lfp}\hat{\mathcal{F}}$와 $\mathit{lfp}\hat{\mathcal{F}}_E$가 존재.
- 연립 방정식의 해 $\mathit{lfp}\hat{\mathcal{F}}_E$는 $\mathit{lfp}\hat{\mathcal{F}}$의 일부분:

$$\mathit{lfp}\hat{\mathcal{F}}_E = \langle (\mathit{lfp}\hat{\mathcal{F}})\ E_0, \cdots, (\mathit{lfp}\hat{\mathcal{F}})\ E_n \rangle$$

올바름

$$\alpha(lfp\mathcal{F}) \sqsubseteq lfp\hat{\mathcal{F}}?$$

요약해석 틀에 의해, 증명할 것은

$$\alpha \circ \mathcal{F} \sqsubseteq \hat{\mathcal{F}} \circ \alpha \quad (\text{혹은}, \alpha(f) \sqsubseteq g \implies \alpha(\mathcal{F}\ f) \sqsubseteq \hat{\mathcal{F}}\ g)$$

즉, 모든 프로그램 식 E에 대해서

$$\forall f : (\alpha(\mathcal{F}\ f))\ E \sqsubseteq (\hat{\mathcal{F}}(\alpha\ f))\ E.$$

구현

분석의 구현은, 분석할 프로그램 E가 주어졌을 때 연립방정식

$$\begin{pmatrix} \hat{X}_0 \\ \vdots \\ \hat{X}_n \end{pmatrix} = \hat{\mathcal{F}}_E \begin{pmatrix} \hat{X}_0 \\ \vdots \\ \hat{X}_n \end{pmatrix}$$

을 푸는것, 즉 $lfp\hat{\mathcal{F}}_E$를 계산하는 것.
두가지 방법으로 계산할 수 있다.

- $\hat{Env}$의 원소수가 유한한 경우.
  $\hat{Env} \to \hat{Val}$의 원소는 유한한 사이즈의 테이블. 방정식의 해

  $$\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} \hat{\mathcal{F}}_E^i(\bot, \cdots, \bot)$$

  를 직접 계산.
- $\hat{Env}$의 원소가 무한한 경우. 혹은, 모든 경우를 계산할 필요가 없을 경우.
  하나의 요약환경 $\hat{\sigma_0}$이 모든 초기환경을 포섭하도록하면, 관심있는 것은

  $$((lfp\hat{\mathcal{F}}_E) \downarrow E)\ \hat{\sigma_0}.$$

  위를 계산하는 데 필요한 만큼만 연립 방정식에서 계산.

"필요한 만큼만 연립 방정식에서 계산"?

- 연립방정식

$$\begin{pmatrix} \hat{X}_0 \\ \vdots \\ \hat{X}_n \end{pmatrix} = \hat{\mathcal{F}}_E \begin{pmatrix} \hat{X}_0 \\ \vdots \\ \hat{X}_n \end{pmatrix}$$

을 확장; $\hat{X}_i$를 $\hat{Env}$의 원소 수 만큼 확장:

$$\begin{pmatrix} \hat{X}_0\ \sigma_0 \\ \vdots \\ \hat{X}_0\ \sigma_\omega \\ \vdots \\ \hat{X}_n\ \sigma_0 \\ \vdots \\ \hat{X}_n\ \sigma_\omega \end{pmatrix} = \hat{\mathcal{F}}_E^{\hat{Env}} \begin{pmatrix} \hat{X}_0\ \sigma_0 \\ \vdots \\ \hat{X}_0\ \sigma_\omega \\ \vdots \\ \hat{X}_n\ \sigma_0 \\ \vdots \\ \hat{X}_n\ \sigma_\omega \end{pmatrix}$$

위의 방정식들 중에서 프로그램 E와 초기 요약환경 $\hat{\sigma}_0$에 해당하는 주인공 $\hat{X}_E\ \hat{\sigma}_0$의 방정식을 푸는 데 필요한 방정식들만을 골라서 푼다

필요한 방정식들이 무한히 많아 지는 경우는? 필요한 방정식이 $\hat{X}_i$에 대해 복수로 나오게 되는 경우, 즉, $\hat{X}_i\,\sigma_1$에 대한 방정식과 $\hat{X}_i\,\sigma_2$에 대한 방정식이 필요하게 되면?

- 대신에 $\hat{X}_i\,(\sigma_1 \sqcup \sigma_2)$에 대한 방정식만을 생각한다면, 계산에 넣어야 할 방정식은 $\hat{Env}$의 높이가 유한하다면 항상 유한개의 방정식만 다루게 된다.
- 그렇게 해서 계산된 $\hat{X}_i\,(\sigma_1 \sqcup \sigma_2)$의 해는 $\hat{X}_i\,\sigma_1$의 해와 $\hat{X}_i\,\sigma_2$의 해를 모두 포섭.