

Homework 1

SNU 4541.664A

**Due: 4/6, email-to-ta(program),
in-class(written)**

Kwangkeun Yi

Exercise 1 “자연수”

자연수 `nat` 는 다음과 같이 정의될 수 있다:

```
type nat = ZERO | SUCC of nat
```

두 자연수를 받아서 그 합/곱에 해당하는 자연수를 만드는 두 함수

```
natadd : nat * nat -> nat  
natmul : nat * nat -> nat
```

를 정의하세요. □

Exercise 2 “참거짓”

Propositional Logic 식들(formula)을 다음과 같이 정의했습니다:

```
type formula = TRUE  
              | FALSE  
              | NOT of formula  
              | ANDALSO of formula * formula  
              | ORELSE of formula * formula  
              | IMPLY of formula * formula  
              | LESS of expr * expr  
and  expr = NUM of int  
      | PLUS of expr * expr  
      | MINUS of expr * expr
```

주어진 `formula`를 받아서 참값을 만들어내는 함수 `eval`

```
eval : formula → bool
```

를 정의하세요. □

Exercise 3 “값계산”

정수식들의 구조를 다음의 타입으로 정의했습니다:

```
type expr = NUM of int
          | PLUS of expr * expr
          | MINUS of expr * expr
          | MULT of expr * expr
          | DIVIDE of expr * expr
          | MAX of expr list
```

주어진 `expr`를 받아서 정수값을 만들어내는 함수 `eval`

```
eval: expr -> int
```

를 정의하세요. 이때, `MAX [NUM 1; NUM 3; NUM 2] = 3`, 즉 `MAX`는 정수식 리스트에서 가장 큰 정수를 찾아내는 정수식입니다. 빈 리스트의 경우는 0을 의미하는 정수식입니다. □

Exercise 4 “K- 실행기”

수업시간에 정의한 명령형 언어 `K`를 생각하자. 이번 숙제는 `K`- 프로그램을 의미정의대로 실행시키는 함수(`interpreter`)를 작성하는 것이다.

아래의 `KMINUS` 꼴을 가지는 모듈 `K`를 정의하라.

```
module type KMINUS =
sig
  exception Error of string
  type id = string
  type exp = NUM of int
           | VAR of id
           | ADD of exp * exp
           | MINUS of exp
  type cmd = SKIP
```

```

      | SEQ of cmd * cmd          (* sequence *)
      | IF of exp * cmd * cmd    (* if-then-else *)
      | ASSIGN of id * exp       (* assign to variable *)
      | READ of id               (* input int to id *)
      | WRITE of exp             (* output *)

type program = cmd
type memory
type value
val emptyMemory: memory
val run: memory * program -> value
end

```

K- 프로그램이 어떻게 exp들로 표현될지는 쉽게 추측할 수 있을 것입니다.
 K- 프로그램이 S 라고 하면,

$K.run (K.emptyMemory, S)$

는 프로그램 S 를 실행시키게 되는데, 이때 프로그램은 실행중에 I/O를 하면서 프로그램이 하는 일을 바깥세상에 드러내게 됩니다. 실행중에 의미가 없는 프로그램이면 Error라는 예외상황을 발생시키고 프로그램 실행이 중단되어야 합니다. “Error”란 (if and only if) 정의된 의미 규칙으로는 그 프로그램의 의미가 정의될 수 없는 경우입니다. 입출력은 정수만 가능합니다. 출력은 정수를 화면에 뿌리고 “newline”을 프린트합니다. □

Exercise 5 집합 $T \ni t$ 는 귀납적으로 다음과 같이 정의된다:

$$t \rightarrow \cdot \mid /t, t/ \mid /t, t, t/$$

모든 $t \in T$ 는 ,와 /의 갯수에 대한 어떤 성질을 만족한다. 그 성질을 찾고 증명하라. □

Exercise 6 식들의 집합이 귀납적으로 다음과 같이 정의된다:

$$e \rightarrow x \mid e + e \mid e * e \mid e ? e e$$

“+”와 “*”는 각각 정수 더하기와 곱하기를 뜻하고 “ $e_1 ? e_2 e_3$ ”은 e_1 의 값이 0이면 e_3 의 값을, 아니면 e_2 의 값을 계산한다.

다음을 증명하라: 모든 식에 대해서, 그 식에 나타나는 변수들의 값이 n 의 배수이면 그 식의 값은 n 의 배수이다. □

Exercise 7 CPO D 위의 연속함수 f

$$f \in D \rightarrow D$$

의 최소 고정점이

$$\bigsqcup_{i \geq 0} f^i \perp$$

임을 증명하라. \square

Exercise 8 CPO A 에서 CPO B 로 가는 연속함수로 구성된 $A \rightarrow B$ 가 CPO임을 증명하라. \square

Exercise 9 다음 식들의 고정점을 찾아라:

- $\lambda x.1 \in \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$
- $\lambda x.x \in \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$
- $\lambda x.x + 1 \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$
- $\lambda f(\lambda x.\text{if } x = 0? 0 : x + f(x - 1)) \in (\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}) \rightarrow (\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N})$
- $\lambda X.\{\epsilon\} \cup \{ax \mid x \in X\} \in 2^S \rightarrow 2^S$ where S is the set of finite strings.

\square

Exercise 10 Given a graph $G = (N, E)$ (N is the set of nodes, $E \subseteq N \times N$ the set of edges between the nodes), the reachable set $reach_G(X)$ of nodes from the initial node set X can be defined as the least fixpoint of a function.

The $reach_G(X)$ is the smallest set S that satisfies

- $X \subseteq S$
- If $x \in S$ then $\{y \mid x \rightarrow y \in E\} \subseteq S$.

Fill out the hole in the following definition:

$$reach_G(X) = fix(\lambda S. \boxed{\phantom{\text{expression}}})$$

\square