Homework 1

SNU 4541.664A

Due: 9/19, email-to-ta(program), in-class(written)

Kwangkeun Yi

Exercise 1 "자연수"

자연수 `nat` 는 다음과 같이 정의될 수 있다:

```
type nat = ZERO | SUCC of nat
```

두 자연수를 받아서 그 합/곱에 해당하는 자연수를 만드는 두 함수

```
natadd : nat * nat -> nat
natmul : nat * nat -> nat
```

를 정의하세요. □

Exercise 2 "참거짓"

Propositional Logic 식들(`formula`)을 다음과 같이 정의했습니다:

```
type formula = TRUE
             | FALSE
             | NOT of formula
             | ANDALSO of formula * formula
             | ORELSE of formula * formula
             | IMPLY of formula * formula
             | LESS of expr * expr
and  expr = NUM of int
          | PLUS of expr * expr
          | MINUS of expr * expr
```

주어진 formula를 받아서 참값을 만들어내는 함수 eval

$$\texttt{eval} : \texttt{formula} \rightarrow \texttt{bool}$$

를 정의하세요. □

Exercise 3 "값계산"

정수식들의 구조를 다음의 타입으로 정의했습니다:

```
type expr = NUM of int
          | PLUS of expr * expr
          | MINUS of expr * expr
          | MULT of expr * expr
          | DIVIDE of expr * expr
          | MAX of expr list
```

주어진 expr를 받아서 정수값을 만들어내는 함수 eval

```
eval: expr -> int
```

를 정의하세요. 이때, `MAX [NUM 1; NUM 3; NUM 2] = 3`, 즉 MAX는 정수식 리스트에서 가장 큰 정수를 찾아내는 정수식입니다. 빈 리스트의 경우는 0을 의미하는 정수식 입니다. □

Exercise 4 "CheckMetroMap"

아래 metro 타입을 생각하자:

```
type metro = STATION of name
           | AREA of name * metro
           | CONNECT of metro * metro
and name = string
```

아래 checkMetro 함수를 정의하라:

```
checkMetro: metro -> bool
```

`checkMetro`는 주어진 `metro` 가 제대로 생겼는지를 확인해 준다. "`metro`가 제대로 생겼다"는 것은(iff) 메트로 역 이름(id in `STATION(`id`)`)들이 항상 자기 이름의 지역(m in `AREA(`id`,` m`)`)에서만 나타나는 경우를 뜻한다.

예를들어, 제대로 생긴 `metro` 들은:

- `AREA("a", STATION "a")`
- `AREA("a", AREA("a", STATION "a"))`
- `AREA("a", AREA("b", CONNECT(STATION "a", STATION "b")))`
- `AREA("a", CONNECT(STATION "a", AREA("b", STATION "a")))`

그렇지 못한 것들의 예들은:

- `AREA("a", STATION "b")`
- `AREA("a", CONNECT(STATION "a", AREA("b", STATION "c")))`
- `AREA("a", AREA("b", CONNECT(STATION "a", STATION "c")))`

□

Exercise 5 집합 $T \ni t$는 귀납적으로 다음과 같이 정의된다:

$$t \to \cdot \mid /t,t/ \mid /t,t,t/$$

모든 $t \in T$는 ,와 /의 갯수에 대한 어떤 성질을 만족한다. 그 성질을 찾고 증명하라. □

Exercise 6 식들의 집합이 귀납적으로 다음과 같이 정의된다:

$$e \to x \mid e + e \mid e * e \mid e?\, e\, e$$

"+"와 "*"는 각각 정수 더하기와 곱하기를 뜻하고 "$e_1?\, e_2\, e_3$"은 e_1의 값이 0이면 e_3의 값을, 아니면 e_2의 값을 계산한다.

다음을 증명하라: 모든 식에 대해서, 그 식에 나타나는 변수들의 값이 n의 배수이면 그 식의 값은 n의 배수이다. □

Exercise 7 CPO D위의 연속함수 f

$$f \in D \to D$$

의 최소 고정점이

$$\bigsqcup_{i \geq 0} f^i \bot$$

임을 증명하라. □

Exercise 8 CPO A에서 CPO B로 가는 연속함수로 구성된 $A \to B$가 CPO임을 증명하라. □

Exercise 9 다음 식들의 고정점을 찾아라:

- $\lambda x.1 \quad \in \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$
- $\lambda x.x \quad \in \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$
- $\lambda x.x + 1 \quad \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\} \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$
- $\lambda f(\lambda x.\text{if } x = 0\text{? } 0 : \ x + f(x-1)) \quad \in (\mathbb{N} \to \mathbb{N}) \to (\mathbb{N} \to \mathbb{N})$
- $\lambda X.\{\epsilon\} \cup \{ax \mid x \in X\} \quad \in 2^S \to 2^S$ where S is the set of finite strings.

□

Exercise 10 Given a graph $G = (N, E)$ (N is the set of nodes, $E \subseteq N \times N$ the set of edges between the nodes), the reachable set $\mathit{reach}_G(X)$ of nodes from the initial node set X can be defined as the least fixpoint of a function.

The $\mathit{reach}_G(X)$ is the smallest set S that satisfies

- $X \subseteq S$
- If $x \in S$ then $\{y \mid x \to y \ \in E\} \subseteq S$.

Fill out the hole in the following definition:

$$\mathit{reach}_G(X) = \mathit{fix}(\lambda S.\square)$$

□