

HW 2

SNU 4541.664A **Due: 10/17, 15:30(in class)**

Kwangkeun Yi

Exercise 1 다음과 같이 요약함수(α)와 구체함수(γ)가 정의되었다. 갈로아연결인지 확인하라.

$$\begin{aligned}\alpha & : 2^{\mathbb{Z}} \rightarrow Interval \\ \gamma & : Interval \rightarrow 2^{\mathbb{Z}} \\ Interval & = \{[a, b] \mid a \leq b, a \& b \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty, \infty\}\} \cup \{\perp\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha \emptyset & = \perp \\ \alpha X & = [\min X, \max X] \\ \gamma \perp & = \emptyset \\ \gamma \top & = \mathbb{Z} \\ \gamma [a, b] & = \{x \in \mathbb{Z} \mid a \leq x \leq b\}\end{aligned}$$

Exercise 2 다음의 조립식 요약함수들이 갈로아연결인지 확인하라.

A 와 \hat{A} 이 갈로아 연결되었고(A 를 요약한 것이 \hat{A} 이고), B 와 \hat{B} 이 갈로아 연결되었다.

- $A \times B$ 를 $\hat{A} \times \hat{B}$ 로 요약하는 함수

$$\alpha_{A \times B} = \lambda(a, b).(\alpha_A a, \alpha_B b)$$

- $A + B$ 를 $\hat{A} + \hat{B}$ 로 요약하는 함수

$$\alpha_{A+B} = \lambda x. \alpha_A x \text{ if } x \in A, \alpha_B x \text{ o.w.}$$

- $A \rightarrow B$ 를 $\hat{A} \rightarrow \hat{B}$ 로 요약하는 함수

$$\alpha_{A \rightarrow B} = \lambda f. \alpha_B \circ f \circ \gamma_{\hat{A}}$$

다음 숙제는 교재 2장과 지난 수업시간까지 다른 내용을 익히고 시도해 본다. 단, 모두 정확히 맞출 필요는 없다. 디자인 프레임워크를 모두 파악하지 않은 상태에서, 분석기를 디자인을 하면서 내가 더 파악해야 할 것이 무엇인지를 아는 것도 중요하다. 물론 모든 내용을 파악하고 잘 디자인 할 수 있으면 좋다. You can enjoy it, try!

Exercise 3 다음 언어로 짜여진 프로그램을 입력으로 받아서 프로그램이 실행된 후의 메모리를 분석하는 분석기를 디자인해 보자.

분석하고자 하는 성질은 실행 후 변수들이 가지는 정수가 짝수인지 홀수인지 여부이다. 분석기는 의미있는 프로그램(“잘 도는” 프로그램)만 입력으로 받는다고 가정한다.

$$\begin{array}{l} C \rightarrow x := E \\ \quad | C ; C \\ \quad | \text{if } E C C \\ \quad | \text{repeat } C E \\ E \rightarrow n \quad (n \in \mathbb{Z}) \\ \quad | E + E \\ \quad | - E \\ \quad | x \end{array}$$

분석기의 디자인은 아래를 완성하는 것이다:

- 프로그램 C 의 의미로 우리가 관심있는 것은 모든 가능한 메모리들에 대해서 어떤 메모리들을 내놓을 지다.

그래서, 분석의 대상으로 삼는 프로그램 C 의 의미는 메모리 집합을 받아서 메모리 집합을 내놓는 함수로 시작하자. 이런 의미의 정의는 간단하다. 원래 의미대로 각 메모리마다 적용해서 나온 메모리들을 모두 모으면 그만이다. 이런 의미구조를 “모듬의미구조(collecting semantics)”라고 한다.

프로그램 C 의 모듬의미구조 $\llbracket C \rrbracket$

$$\llbracket C \rrbracket \in 2^{\text{Store}} \rightarrow 2^{\text{Store}}$$

를 정의하라.

- 모듬의미구조의 요약본(abstract semantics) $\llbracket C \rrbracket^\#$

$$\llbracket C \rrbracket^\# \in \text{Store}^\# \rightarrow \text{Store}^\#$$

을 정의하라. 변수들의 짝홀수를 판단하려면 요약의미공간 $\text{Store}^\#$ 를 어떻게 정의하였는지 보이라. CPO인가?

이때 두 CPO, 2^{Store} 와 $\text{Store}^\#$ 는 갈로아 연결되면 자연스러운데 그런지 확인하라:

$$2^{\text{Store}} \xleftrightarrow[\alpha]{\gamma} \text{Store}^\#$$

- 마지막으로, 요약본이 올바른지(모듬의미를 포섭하는지)

$$\forall S \in 2^{\text{Store}} : \llbracket C \rrbracket S \subseteq \gamma(\llbracket C \rrbracket^\#(\alpha S)).$$

를 설득하라.

- 우리의 분석기는 주어진 프로그램 C 에서 가능한 초기 메모리들을 모두 모아 (S_0 라고하자) 그것의 요약버전을 가지고 요약본 의미

$$\llbracket C \rrbracket^\#(\alpha(S_0))$$

를 계산하는 것이다.

□