Homework 3

SNU 4541.664A

due: 4/10 in class

Kwangkeun Yi

- 이번 숙제의 목적은, 축지법(widening)에 대한 조건들이 살짝 변형될 때 분석기의 안전성을 확인하는 증명을 해보는 것이다.
- 축지법 $\triangledown$의 조건은 예를들어 아래 두 버전이 있다.
  - [버전 A]
    1. $a \sqsubseteq a \triangledown b$ 이고 $b \sqsubseteq a \triangledown b$, 또는 $\gamma(a) \sqcup \gamma(b) \sqsubseteq \gamma(a \triangledown b)$.
    2. 임의의 체인 $\{a_i\}_i$에 대해서 다음의 점화식이 유한번만에 제자리를 맴돈다:

$$\begin{array}{rcl} X_0 &=& a_0 \\ X_{i+1} &=& X_i \triangledown a_i \end{array}$$

  - [버전 B]
    1. (상동)
    2. 임의의 원소열(체인에만 국한되지 않는다) $\{a_i\}_i$에 대해서 다음의 점화식이 유한번만에 제자리를 맴돈다:

$$\begin{array}{rcl} X_0 &=& a_0 \\ X_{i+1} &=& X_i \triangledown a_i \end{array}$$

Exercise 1 CPO A위의 연속(continuous)함수 $F : A \to A$와 그 요약 버전 함수 $F^{\#} : A^{\#} \to A^{\#}$를 생각하자. 공간은 갈로아 연결되어있고:

$$A \underset{\alpha}{\overset{\gamma}{\leftrightarrows}} A^{\#}$$

함수 F와 $F^\#$ 사이에는 다음의 조건을 만족한다:

$$F \circ \gamma \sqsubseteq \gamma \circ F^\#.$$

함수 $F^\#$는 단조함수이다. 축지법 $\bigtriangledown$은 [버전 A]의 조건을 만족한다. $A^\#$에 있는 다음과 같은 원소열을 생각하자:

$$\begin{array}{rcl} X_0^\# & = & \bot^\# \\ X_{i+1}^\# & = & X_i^\# \bigtriangledown F^\#(X_i^\#). \end{array}$$

- $\{\bot^\#, F^\#(X_0^\#), F^\#(X_1^\#), \cdots\}$이 증가하는 체인임을 증명하라. 따라서, 축지법($\bigtriangledown$)의 조건에 의해서 어떤 자연수 N 부터는 위의 원소열은 제자리에 맴돈다:
$$X_N^\# = X_N^\# \bigtriangledown F^\#(X_N^\#).$$
- 다음을 증명하라:
$$\mathit{fix} F = \bigsqcup_i F^i \bot \sqsubseteq \gamma(X_N^\#).$$
즉,
$$\forall n \in \mathbb{N} : F^n \bot \sqsubseteq \gamma(X_N^\#)$$
임을 증명하면 충분하다.

Exercise 2 축지법 $\bigtriangledown$은 [버전 B]의 조건을 만족한다. 이전 문제와 모든 조건이 한가지를 제외하고 같다: 함수 $F^\# : A^\# \rightarrow A^\#$ 가 단조(monotonic)함수일 필요는 없다.

- $\{\bot^\#, F^\#(X_0^\#), F^\#(X_1^\#), \cdots\}$ 에 대해서 축지법($\bigtriangledown$)의 조건에 의해서 어떤 자연수 N 부터는 위의 원소열은 제자리에 맴돈다:
$$X_N^\# = X_N^\# \bigtriangledown F^\#(X_N^\#).$$
- 다음을 증명하라:
$$\mathit{fix} F = \bigsqcup_i F^i \bot \sqsubseteq \gamma(X_N^\#).$$
즉,
$$\forall n \in \mathbb{N} : F^n \bot \sqsubseteq \gamma(X_N^\#)$$
임을 증명하면 충분하다.