튜링의 1935년

앨런 튜링은 정말로 천재인가

이광근 서울대 컴퓨터공학부 교수

앨런 튜링Alan Turing의 그 1년이 궁금했다. 튜링이 괴델Kurt Gödel의 증명을 배운 때가 1935년이다. 케임브리지 대학 수학과를 졸업하고 1년이 되던 23살인 때였다. 막스 뉴만Max Newman 교수가 개설한 〈수학의 근본과 괴델 정리Foundations of Mathematics and Gödel's Theorem〉라는 강의를 통해서였다. 그러고는 같은 증명을 자신만의 방식으로 재구성한다. 1936년의 논문이다. 컴퓨터의 원천 설계도(보편만능의 기계)가 드러난 논문이다. 강의를 듣고(1935년) 그 논문을 내기까지의 이 일 년여.

뭔가 구겨진 느낌 때문이었다. 펴고 싶었다. 매스컴은 흔히 "천재"라는 말로 튜링을 수식하거나 그렇게 홍보한다. 그러나 조금 무책임한 표현이고 학생들의 자신감을 좀먹게 하는 면이 있다. 학생들을 은연중에 억누른다. 난 천재가 아니므로 그런 원천 아이디어를 만들지는 못할 게 분명해.

그 일 년을 복기해보기로 했다. 내가 튜링의 1936년 논문 내용을 이런저런 계기로 소개하게 되면서 그 논문이 나오기까지의 전말과 경위를 살펴보니 천재라는 매스컴의 표현은 다시 짚어볼 필요가 있었다. "그런 말에 겁먹지 말라, 천재라기보다는 그렇게 잘 배웠다면 우리 주변에서도 가능했을 우수한 인재 정도다."라는 메시지를 굳히게 되었다. 이를 뒷받침하는 근거가 그 기간을 복기하

면서 구체적으로 드러날 것이라고 믿었다.

그래서 튜링을 추측해갔다. 괴델의 증명을 익히는 튜링을 상상하며 그가 어디에서 컴퓨터라는 도구의 원천 아이디어를 얻었을지 탐색해갔다. 막스 뉴만 교수를 추측하는 셈이기도 했다. 그가 괴델의 증명을 어떻게 이해해서 어떻게 강의했을까. 튜링이 들었던 그 강의를 상상해보았다. 괴델과 튜링을 뒤쫓은 한 달이었다.•

컴퓨터라는 도구

컴퓨터는 특이하다. 컴퓨터는 인류가 만든 다른 도구와는 많이 다르다. 다른 도구들은 사용하려면 대개 근육이 필요하지만 컴퓨터는 근육이 아니라 언어가 필요하기 때문이다. 컴퓨터에게 일을 시키려면 글을 써야 한다. 쓴 글을 컴퓨터에 실으면, 컴퓨터는 그 글이 표현한 대로 일을 해간다. 반면에 다른 도구들은 (예를 들어, 칼이나 지우개) 근육을 쓰지 글을 쓰진 않는다. 글로 부리는 도구, 컴퓨터를 그래서 '마음의 도구'라고도 부른다.

그래서 컴퓨터는 만능의 도구다. 컴퓨터 하나로 할 수 있는 게 무궁무진하기 때문이다. 이런 글을 실으면 이렇게, 저런 글을 실으면 저렇게, 컴퓨터는 그 글에 적힌 대로 다양한 일을 해준다. 한이 없어 보인다. 끊임없이 새로운 글이 출현해서 컴퓨터를 이렇게 저렇게 부린다. 그러한 글을 '소프트웨어'라고 부르고, 컴퓨터를 '하드웨어'라고 부른다.

이런 놀라운 도구의 원천 설계도가 세상에 출현한 때가 1936년 11월이다. 앨런 튜링이 쓴 다음의 논문에서였다.

> "계산가능한 수에 대해서, 수리명제 자동생성 문제에 응용하면서 On Computable Numbers, With an Application to the Entscheitungsproblem"

• 파리고등사범학교(École Normale Supérieure, Paris)를 방문하던 기간(2016. 7. 5.~2016. 10. 31.) 중이었다.

이 논문은 '이런 특이한 도구를 디자인했으니 보라'는 논문이 아니다. 이 논문은 당시 수학계를 놀라게 한 증명을 수업에서 배운 튜링이 같은 내용을 자기만의 스타일로 다시 증명해본 것이다. 그런데 이 논문에서 컴퓨터의 원천 설계도가 소품으로 슬그머니 드러난 것이다.••

튜링이 그 수업을 들은 1935년의 현장을 재생하기 전에, 튜링의 논문을 우선 조망하자. 준비운동으로 튜링이 디자인한 컴퓨터의 원천 설계도를 소개하는 게 독자들의 이해에 도움이 될 듯하다.

튜링 논문의 조망, 컴퓨터의 원천 설계도

청년 튜링이 다시 증명해본 사실은 "자동으로는 수학의 모든 사실들이 만들어질 수 없다."라는 것이다. 괴델이 이 사실을 어떻게 증명했는지는 다음 절에 뉴만 교수의 강의를 재생하면서 다루기로 하고, 이 절에서는 튜링의 논문에 일단 눈길을 두자.

튜링은 그 증명을 담백하게 접근한다. "자동으로는 …가 불가능하다"를 증명해야 하므로, 튜링은 '자동 기계장치'가 무엇인지를 정의한다. 기계장치? 그런 애매한 대상을 어떻게 정의할까? 단도직입적이고 손에 잡히는 모습으로 정의한다. "다음과 같은 네 가지 부품들만으로 만들 수 있는 것을 기계장치라고 정의하겠다. 네 가지 부품들은 …" 이렇게 정의해간다. 그리고 그렇게 정의하면 충분하다고 설득한다. 상상할 수 있는 모든 자동 기계는 그 네 개의 부품으로 만들 수 있다고. 그리고는 그 부품들로 아무리 기계를 잘 만들어도 수학의 모든 사실들을 뱉어내는 기계는 불가능하다고 증명한다.

이 증명에서 중요한 소품이 등장한다. 정해진 기계부품만으로 만든 기계의 하나지만 조금 특이한 작동을 하는 기계였다. 이 특이한 기계는 입력으로 받는 것부터 특이하다. 글로 표현된 기계장치

•• 튜링은 손기정 선생과 동년배다. 1936년 8월에 손기정 선수는 베를린 올림픽 마라톤 금메달을 땄고, 튜링은 같은 해 5월에 위 논문을 제출한다. 아쉬운 대비다. 우리는 당시 일제 하에서 기초 과학의 전통이 자라지 못하고 있었고, 우리의 재능이 세계 최고로 발휘될 수 있었던 것은 스포츠밖에 없었던, 그래도 자랑스럽지만 아쉬운.

를 입력으로 받는다. 글로 표현한 기계장치? 얼핏 묘하다고 생각할 수 있지만 전혀 신기한 이야기가 아니다. 우리는 일상에서 뭐든 늘 글로 표현할 수 있지 않던가? 24개 한글 심벌이면 충분하다. 기계장치라는 드라이한 것이라면 더더욱 애매하지 않게 정확히 표현할 수 있다. 더군다나 그 글은 딱 짜여진 제한된 형식만으로 충분하다. 표현하려는 기계장치들이란게 청년 튜링이 정의한 네 가지 부품들로 만들어진 것들이기 때문이다.

비유를 하자면 청량음료 용기에 쓰여 있는 영양성분표와 같다. 영양성분표는 일정한 형식과 특정한 단어만 사용해서 다양한 음료마다 그 영양성분을 정확히 표현한다. 표현할 것이 미리 정해져 있기 때문이다. 정해진 영양소 중에서 해당하는 영양소의 정해진 내용(일일 권장섭취량 기준 비율)뿐이다. 기계는 뭐가 되었든 청년 튜링이 정의한 네 가지 부품만으로 만든 것이다. 미리 정해진 부품들이다. 따라서 기계를 글로 표현할 때, 정해진 형식으로 제한된 단어만 사용해서 정확히 표현할 수 있는 것이다.

그런 입력을 받아서 그 기계가 하는 일이 뭐냐? 글자들로 입력받은 기계장치를 그대로 따라하는 것이다. 이게 어떻게 가능할까? 마술은 없다. 다음과 같은 상식적인 이유 때문이다. 정해진 형식의 제한된 단어들로 표현된 기계장치를 입력으로 받으므로 입력을 알아보는 것도 일정한 방식으로 할 수 있다. 즉, 입력으로 받은 기계장치를 기계적으로 알아볼 수 있다는 이야기이다. 그렇다면 글자들로 입력받은 기계장치가 하는 일을 그대로 따라 하는 것도 가능하리라는 느낌이 들 것이다.

비유로 다시 청량음료의 영양성분표를 생각해보자. 영양성분표를 알아보는 데는 단순한(기계적인) 국어 실력이면 충분하다. 미리 정해진 내용과 형식으로만 되어 있기 때문이다. 그리고 같은 성분의 음료를 그대로 따라 만드는 것이 가능하다. 이때도 단순한(기계적인) 작업으로 충분하다. 어떤 영양성분표를 만나도 표에 명시된 영양소들을 비율대로 섞기만 하면 된다. 영양성분표에 명시하기로 정한 영양소들을 모두 창고에 가지고 있으면 된다. 명시된 영양소 창고로 가서 명시된 양만큼을 모아다가 섞으면 그만이다. 별 지능이 필요 없다. 마찬가지로 제한된 형식으로 서술된 기계를 입력으로 받아서 그 기계를 따라 하는 과정이 기계적으로(단순작업으로) 가능하리라는 것은 어느 정도 충분히 눈치챌 수 있을 것이다.

기계를 입력으로 받아서 그 기계가 하는 일을 고스란히 따라 하는 기계. 이런 특이한 기계를 그래서 청년 튜링은 '보편만능의 기계universal machine'라고 이름 붙인다. 임의의 기계를 입력으로 받아서 그 기계가 할 일을 그대로 해주는 기계기 때문이다.

바로 이 보편만능의 기계가 컴퓨터의 원천 설계도다. 기계(소프트웨어)를 글로 표현해서 넣어주면 그 기계가 하는 일을 따라 해주는 기계(컴퓨터). 소프트웨어를 넣어주면 그 소프트웨어대로 일을 하는 도구. 바로 오늘날 우리가 컴퓨터라고 부르는 도구다.

이제 이 보편만능의 기계를 이용해서 튜링이 괴델의 증명을 색다르게 다시 시도하던 1935년을 복기해보자.

괴델의 불완전성 정리incompleteness theorem

튜링이 1935년 수강한 뉴만 교수의 강의는 당시 수학계를 강타한 괴델의 불완전성 정리의 증명을 따라가보는 것이었다.

괴델의 불완전성 정리는 괴델이 1931년에 증명한 다음의 사실이다. "모든 사실이 증명가능한 건 아니다." 혹은 "사실들이, 증명할 수 있는 것들보다 많다." 그래서 불완전성이라고(빠뜨리는 것이 있다고) 이름붙인 것이다. 조금 전문적으로는, "기계적인 방식만으론 자연수에 대한 모든 사실들을 만들어낼 수 없다." 여기서 '기계

적인 방식'이란 정해진 논리체계를 뜻한다. 그래서 불완전성 정리를 다르게 읽으면 이렇다. 우물 안, 믿을 만한 논리체계 안, 참이지만 그 우물 안에서는 증명할 수 없는 것이 항상 있다. 기계(논리체계)는 참인 것 모두를 만들 수(증명할 수)는 없다.

그럼 '논리체계'가 무엇을 뜻하는지, 그리고 왜 괴델의 증명을 당시 수학계에 내리친 청천벽력의 좌절이라고 할 수 있는지, 왜 1935년에 케임브리지 수학과에서 그 증명을 강의하는 과목까지 개설될 정도였는지, 괴델 증명의 배경을 잠깐 살펴보고 가자.

기계로는 수학자를 대신할 수 없다[•]

1931년 괴델이 해낸 이 증명의 배경은 1928년으로 살짝 거슬러 올라간다. 1928년에 대담한 꿈이 유럽 수학계에 번지기 시작한다. 당대 선두의 수학자였던 힐베르트David Hilbert가 독려한 꿈이었다.

힐베르트의 생각은 이랬다. 수학자들이 해왔던 작업 과정을 보아하니, 모든 과정을 자동으로 할 수 있을 것 같다. 자동장치를 만들어서 돌리기만 하면, 수학자들이 애써서 찾아내는 사실들(예를 들어 근의 공식 같은 사실들)이 모두 자동으로 술술 만들어질 것 같다.

그런데 이 '자동장치'란 무엇을 말하는 걸까? 예를 들어 이런 것이다. 셜록 홈즈가 사건을 해결해가는 과정을 보자. 각 사건마다 내용은 제 각각이다. 하지만 매번 사건을 해결하는 논리적인 과정을 보면 같은 패턴을 반복한다. "A면 반드시 B다, 그리고 지금 A가 사실이다, 그렇다면 B가 사실이어야 한다.", "A가 사실이라면 지금 증상은 말이 안 된다, 그렇다면 A는 사실이 아니다." 등의 것들이다. 이런 것들이 자동으로 적용할 수 있는 추론규칙(패턴)이다. 셜록 홈즈는 사건마다 'A'와 'B'에 구체적인 경우를 대입해서 새로운 사실을 유추해낸다. 이때 하는 일이란 지금까지 알려진 사실들을 대입할 수 있는 추론규칙을 찾는 것이다. 이 스텝은 자동화할 수 있는 단순 작업이다. 추론규칙의 전제('그렇다면'의 왼쪽)에 현재 알고 있는 사실을 대입해보면, 그 규칙의 결론('그렇다면'의 오른쪽)에 해당하는 사실이 드러난다. 예를 들어 위의 두 번째 추론규칙을 적용하는 예다. "장그래 박사가 그저께 출장을 떠났다면, 어제 세미나를 진행했는데 말이 안 된다." 그렇다면 "장그래 박사는 그저께 출장을 떠나지 않았다." 이렇게 적용 가능한 추론규칙을 동원해서 새로 알게 되는 사실들을 모두 모아갈 수 있다. 새로 알게 된 사실 때문에 또 다른 새로운 사실을 알게 된다. 이렇게 연쇄반응 하듯이 새로운 사실을 생산해내는 엔진은 셜록 홈즈의 머릿속에 있는 몇 가지의 고정된 추론규칙(패턴)들이다.

[•] 이 부분은 본인의 책의 참고문헌 6에서 대부분 그대로 따왔음을 밝힌다.

힐베르트가 제안한 문제는 수학자들이 사용하는 이런 규칙들을 찾아보자는 것이다. 그렇게 찾은 유한 개의 추론규칙들이 부품이 되는 자동장치(알고리즘)를 만들자는 것이다. 그 기계의 손잡이를 아무 생각 없이 돌리기만 하면 새로운 사실들을 모두 뱉어내는 그런 기계. 힐베르트는 이런 기계를 만들 수 있을 것 같다고, 그런 기계를 만들자고 수학자들을 자극한다. 자동으로 모든 수학의 사실들을 술술 만들어낼 수 있을 것 같다는 꿈이었다. 이러한 추론규칙들을 '논리체계axiomatic system'라고, '우물'이라고 내가 비유한 것이다.

하지만 이 꿈은 3년 만에 산산이 부서진다. 괴델이라는 25세의 신참 수학자였다. 괴델은 그 꿈은 절대 이루어질 수 없다고 증명해 버린다. 아무리 정교하게 자동기계를 만들어도 수학의 모든 사실을 샅샅이 뱉어내게 만들 수는 없다고 증명한다.

이 증명의 내용이 1935년 튜링을 만난 것이다. 38세의 막스 뉴만 교수가 개설한 강의에서 였다. 그 강의는 괴델의 증명을 하나하나 따라가면서 막을 내린다. 이제 그 강의를 재생해보자. 뉴만 교수 강의의 마지막 파트는 다음과 같았을 것이다.

뉴만 교수가 강의하는 괴델의 불완전성 증명

"참이지만 기계적인 논리체계로는 증명 불가능한 것이 존재한다." "자연수에 대한 명제들의 세계로 국한하더라도 그런 것이 존재한다." 괴델이 이것을 어떻게 증명해갔는지 살펴보자.

다음 등식을 만족하는 명제 X가 있으면 된다.

$$X\text{는 증명불가능하다} \;=\; X \qquad \cdots\cdots\cdots(1)$$

왜일까? 모든 명제는 참이거나 거짓, 둘 중 하나여야 한다. 각 경우를 따져보자. X가 참인 경우, 등식 (1)의 왼쪽도 참이라는 이야기이므로, X는 증명불가능하다. X가 거짓이라면 그 반대가 참이므로, 등식 (1)에 따라 X는 증명가능하다. 그런데 논리체계가 믿을 만하면(그래야만 한다), 거짓을 증명할 수 있으면 곤란하다. 따라서 'X는 참이고 증명불가능하다'만 사실일 수밖에 없다. X는 참인데 증명불가능하므로 불완전성 정리를 증명한 것이다. 단, 그런 명제 X가 있기만 하다면. 그런데 결론부터 말해서, 그런 명제가 존재한다.

앞으로 설명을 경제적으로 하기 위해서, 이 글에서 자주 쓰는 표기법을 먼저 소개한다. 명제 'x는 증명불가능하다'를 '증명불가(x)'로 쓰자. 명제 A에 밑줄을 그은 $\underline{A}$는 그 명제의 괴델수•를 뜻한다. 거꾸로 괴델수 Z에 윗줄을 그은 $\overline{Z}$는 그 괴델수에 해당하는 명제를 뜻한다. $A[\text{‘}x\text{’} \mapsto C]$로 쓰면, 명제 A에 있는 변수 x를 C로 바꾼 명제를 뜻한다. $[\text{‘}x\text{’} \mapsto C]$에서 '$x$'는 상수로서 심벌 x를 뜻한다. 다른 것으로 바뀔 수 있는 변수가 아니다. 등식기호 위에 'def'를 쓴 것 $\stackrel{\text{def}}{=}$은 그렇게 정의한다는 뜻이다. 두 개가 같다는 판단이 아니다.

다시 논의를 이어가자. 이제 확인할 것은 그런 (등식 (1)을 만족하는) 명제 X가 존재하냐는 것이다.

다루는 논리체계는 자연수에 대한 세계다. 자연수에 대한 논리

• 임의의 명제에 대응하는 고유의 자연수.

안에서 증명불가능한 명제가 있음을 보여야 한다.

그런데 'x는 증명불가능하다'는 명제는, 명제 x에 대한 명제이지 자연수에 대한 명제가 아니다. 그러나 자연수에 대한 명제로 만들 수 있다. 괴델은 명제들을 고유의 자연수로 표현하는 방법을 정의한다. 명제에 해당하는 자연수가 있고, 거꾸로 그런 자연수에서 해당 명제를 정확히 복구할 수 있는 이 방식을 '괴델수로-표현하기Gödel numbering'라고 한다. 이 방식을 통해서, 명제에 대한 명제는 모두 자연수에 대한 명제가 된다.•• 그래서 'x는 증명불가능하다'는 명제도 명제 x에 해당하는 자연수(괴델수) $\underline{x}$를 사용해서 자연수에 대한 명제 '$\underline{x}$는 증명불가능하다'로 만들 수 있다.

그리고 '증명불가능하다'는 판단도 자연수 사이의 명제이어야 한다. 이것도 괴델수-표현하기를 빌리면 자연수에 대한 명제로 표현할 수 있다. 논리체계 안에서 증명이란 추론규칙들로 조립한 구조물이고, 증명한 명제는 그 구조물의 일부다. 괴델수로-표현하기를 사용하면, 증명이라는 구조물의 괴델수는 증명한 명제의 괴델수를 인자로 가지고 있게 된다. 따라서 '$\underline{x}$는 증명불가능하다'는 명제도 자연수에 관한 명제로 다음과 같이 표현된다: "증명에 해당하는 괴델수들은 $\underline{x}$로는 나누어지지 않는다."

그러면 다음을 만족하는 자연수 세계의 명제 X가 존재한다.

$$X \;=\; \text{증명불가}(\underline{X})$$

그런 X는 이것이다:

$$X \stackrel{\text{def}}{=} G[\text{‘}x\text{’} \mapsto k] \qquad \cdots\cdots\cdots(2)$$

$$G \stackrel{\text{def}}{=} \text{증명불가}(\underline{\overline{x}[\text{‘}x\text{’} \mapsto x]}) \qquad \cdots\cdots\cdots(3)$$

$$k \stackrel{\text{def}}{=} \underline{G} \qquad \cdots\cdots\cdots(4)$$

•• 괴델수로-표현하기(Gödel numbering)는 임의의 명제를 고유의 자연수로 표현하는 방법이다. 명제는 기호들이 한 줄로 서 있는 문장이다. 명제를 표현하는 데 사용할 수 있는 기호들이 예를 들어 24개라고 할 때, 기호마다 1부터 24까지 고유번호를 붙인다. 한 명제가 (7, 15, 1, 19)라고 하자. 이 명제는 소수를 차례대로 이용해서 $2^7 \times 3^{15} \times 5^1 \times 7^{19}$ 로 표현할 수 있고, 그 결과 하나의 자연수가 나온다. 이런 자연수를 인수분해 하면 원래의 명제를 복귀할 수 있다. 어렵지 않은 방법이다. 관심 있는 독자는 참고문헌 3을 참고하기 바란다.

왜냐하면

$$
\begin{aligned}
X &= G[\text{‘}x\text{’}\mapsto k] && \text{(}X\text{가 } G[\text{‘}x\text{’}\mapsto k]\text{이므로)}\\
&= \underbrace{(\text{증명불가}(\underline{\bar{x}[\text{‘}x\text{’}\mapsto x]}))}_{G}[\text{‘}x\text{’}\mapsto k] && \text{(}G\text{를 그 정의로 바꿔쓰면)}\\
&= \text{증명불가}(\underline{\bar{k}[\text{‘}x\text{’}\mapsto k]}) && \text{(}G\text{안의 변수심볼 }x\text{를 }k\text{로 바꿔쓰면)}\\
&= \text{증명불가}(\underline{G[\text{‘}x\text{’}\mapsto k]}) && \text{(괴델수 }k\text{에 해당하는 명제 }\bar{k}\text{는 }G\text{이므로)}\\
&= \text{증명불가}(\underline{X}) && \text{(}G[\text{‘}x\text{’}\mapsto k]\text{가 }X\text{이므로)}
\end{aligned}
$$

이렇게 괴델의 증명은 명쾌하게 끝난다.

뉴만 교수의 해설

뉴만 교수는 괴델의 증명을 위와 같이 강의하면서 이런 해설을 덧붙였을 것이다. 해설 없는 삼류 강의였을 리는 없다.

> "위 증명 과정을 곱씹어보면 이렇다. 우선 괴델이 명제를 고유의 자연수(해당 괴델수)로 표현하는데, 이 덕에 가능한 게 뭔지를 잘 보라. 위의 괴델수 k (정의 (4))에서 x에 해당하는 것이 고유하게 괴델수 구조에 있다. 그곳을 k로 바꾸는 것은 아무 문제가 안 된다. 즉, 자신(k) 속에 있는 어떤 것을 자기 자신(k)으로 바꾸는 것이 전혀 문제없다. 자기의 일부를 자기 자신을 유한하게 표현한 어떤 것-이름 같은 것(괴델수)-으로 바꿔치기하는 것이므로."

이렇게 증명에 동원한 핵심 테크닉을 강조하고 나서 중요한 해설을 이어갔을 것이다. 다음과 같이.

"그리고 근간이 되었던 등식 'X = 증명불가(X)'가 뜻하는 것은 두 가지다.

- 자기 자신(X)에 대해서 논술하는 것(증명불가(X))이 우물(주어진 논리체계) 안에서 가능하다는 것을 보여주고 있다.
- 위 등식을 보면, X는 '증명불가(X)'와 같다는 것이다. X에 '증명불가'를 붙여봤자 X와 같다는 것이다. 좀 전문적으로 말하면, '증명불가'를 붙이는 함수의 고정점fixpoint(변하지 않는 입력)이 X인 것이다. 그런데 고정점은 일반적으로 무한의 개념을 필요로 한다. 고정점은 '증명불가'라는 함수를 무한히 중복해서 쌓아간 결과로 정의될 수 있다. 예를 들어 숫자의 세계에서 다음과 같이 x에 대해서 논술한 등식을 보자.

$$x = x + 1$$

자기 자신(x)에 1을 더한 것이 자기 자신이라고 말하고 있다. 그런 x는 무엇인가? 무한수다. 무한수에 1을 더해봤자 무한수와 같기 때문이다.

$$x = x\multimap$$

자기 자신에 구슬하나를 매단($\multimap$) 것이 자기 자신이라고 말하고 있다. 그런 X는 무엇인가? 구슬이 무한히 매달린 실이다. 구슬이 무한히 매달린 실에 구슬하나를 더 매달아봤자 똑같다. 괴델이 발견한, 다음의 등식

$$X = \text{증명불가}(X)$$

에서 X는 무한한 그런 것

증명불가(증명불가(…

을 우물 안에서 유한하게 표현하는 법을 찾은 것이다."

이렇게 뉴만 교수의 강의는 끝났을 것이다. 이 강의에 앉아 있던 청년 튜링은, 아마 괴델형님(튜링보다 여섯 살 위)과 한번 겨루고 싶은 마음이 일었을 것이다. 커다란 센세이션을 일으킨 증명이었으니, 공부 좀 한다는 학생이라면 그 증명을 배우고 나면 나도 할 수 있겠다는 배짱이 슬금슬금 올라오지 않았을까?

그래서 튜링은 괴델의 증명을 자기만의 스타일로 다시 증명해 본다. 이 증명이 튜링의 1936년 논문이다.

추측해보는 튜링의 사고과정

이제 튜링의 머릿속을 추적해보자. 뉴만 교수의 강의를 듣고 튜링이 자신만의 증명을 만들기까지 어땠을지 되밟아가보자. 위 뉴만 교수의 해설 바로 두 번째 꼭지. 이게 청년 튜링에게 힌트를 주지 않았을까? 튜링은 자동기계 장치를 정의하고 나선 다음과 같이 생각의 꼬리를 물어갔을 것이다.

"내 기계의 세계에서 무한과 관련된 뭔가가 불가능해야 한다. 무한과 관련된 모든 게 가능하다면 곤란하다. 왜냐하면, 괴델 증명에서 무한과 관련됐던 '증명불가능한 참인 식', 이걸 만들 수(증명할 수) 있다는 이야기가 될 수 있기 때문이다. 그러면 내 기계의 세계는 완전해진다. 그건 괴델의 증명대로 불가능한 것이지 않은가. 그렇다면, 내 기계의 세계에서 무한과 관련해서 불가능한 게 뭘까?"

그러면서 자연스럽게 문제를 쪼갰을 것이다.

"우선 무한한 게 무엇인지 찾아보자. 모든 기계 자체는 유한하다. 하지만 기계의 실행은 무한할 수 있다. 어떤 기계는 영원히 돌 수 있으니까."

그러면서 무한히 도는 기계와 관련해서 불가능한 것은 무엇인지를 찾았을 것이다. 이게 첫 고비였을 것이다. 이 고비를 넘기는 힌트는 뉴만 교수의 첫 번째 해설꼭지였을 것이다.

"괴델의 증명에서 근간이 되었던 등식

$$X \;=\; \text{증명불가}(X)$$

이건 자기 자신(X)에 대해서 논술하는 논리판단을 표현한 거다.
내 기계의 세계에선 뭐지? 기계에 대한 기계적인 판단 정도가 되나? 무한히 도는 기계에 대해 불가능한 걸 찾고 있는데, 그렇다면? 그렇다면, 무한히 도는 기계에 대한 기계적인 판단? 이게 불가능한가?"

그리고 누구도 간 적이 없는 자신만의 기계의 세계로 홀로 들어섰을 것이다. 그 숲으로 들어서면서 괴델의 증명이 지시하는 빛은 희미해지기 시작했을 것이다.

"기계의 실행이 무한할지 아닌지 판단하는 기계?
우선 기계가 기계를 볼 수 있어야 하는데. 기계를 입력으로 받아서 그 기계를 관찰할 수 있는 기계? 이게 가능해야 하는데.

기계를 입력으로 받을 수 있나? 기계를 심벌들의 일차원 실로 표현하기, 기계를 글로 표현하기. 당연히 가능하지. 일상에서 뭐든 늘 글로 표현할 수 있잖아. 내 기계장치같이 제한되고 드라이한 것이라면 당연히 애매하지 않게 정확히 표현할 수 있지. 더군다나 딱 짜여진 제한된 형식만으로 충분해. 표현하려는 기계장치들이란 게 내가 정한 네 가지 부품들로 만들어진 것들이므로. 괴델도 명제를 고유의 자연수로 표현하고 복기할 수 있었잖아."

아직 그렇게 어두운 숲은 아니다.

"입력으로 기계를 받을 수 있는 건 쉽고. 이제, 입력된 기계의 실행이 무한할지 판단하기가 불가능하면 좋은데. 불가능한가?"

이게 두 번째 고비였을 것이다.

"그게 불가능할까? 불가능할까? 당장은 모르겠다. 흠…
그럼 가능한 건 어디까지일까? 기계를 입력으로 받아서 어디까지가 가능할까?"

불가능한 걸 확인하고 싶을 때, 거꾸로 접근하는 방법이 있다. 가능한 것을 최대한 모아보는 것이다. 그 모임에 끼지 못한다면 불가능하기 십상이다. 달을 그리는 두 가지 방법이 있다고 한다. 직접 동그라미를 그리는 방법과 구름을 그려 달의 외곽을 드러내는 방법. 첫 번째 방법이 여의치 않을 때 두 번째 방법을 시도해보는 튜링이었을 것이다.

"가능한 건 어디까지일까? 글로 표현된 기계를 따라하기, 이 정도까지는 가능할 것 같은데. 그렇지.
정해진 형식의 제한된 단어들로 표현된 기계장치를 입력으로 받으니까. 입력을 알아보는 것도 일정한 방식으로 기계적으로 할 수 있을 거고. 그렇다면 입력받은 기계장치가 하는 일을 그대로 따라 하는 것도 가능하겠지. 그렇지."

이렇게 기계를 입력으로 받아 그 기계대로 실행해주는 기계를 생각하고 그런 기계(보편만능의 기계)가 가능하다는 것을 확인했을 것이다. 이렇게 컴퓨터의 원천 설계도를 만들어 배낭에 챙기고 전진했을 것이다. 원래의 목적지를 향해서.

"그런 기계까지는 가능하고. 무한히 돌지 판단하는 기계는 불가능하면 좋겠는데. 어떻게 증명해야 할까…."

이때 감지하지 않았을까. 희미하지만 확실한 빛. 괴델의 증명에서 그가 아직 활용하지 못한 기술. 괴델의 대각선 정리. 그리고 예전에 배운 칸토르Georg Cantor의 대각선 논법도 머리를 스쳤을 것이다.

"괴델이 불완전성 증명에서 사용한 기술 중에 내가 아직 빌려오지 않은 것이 대각선 정리인데. 이걸 내 기계의 세계에서 동원해서 증명할 수 있는 건가, 혹시? 괴델의 대각선 정리는 논리식에 대한 것이므로 직접 쓸 일은 없고. 칸토르의 대각선 논법은 활용하게 될 듯한데, 어디보자."

그리고는 그 기계와 칸토르의 대각선 논법diagonalization을 이용해서 증명을 해낸다. 기계를 입력으로 받아서 그 기계가 언젠가는 멈출지 영원히 돌지를 판단하는 기계는 불가능하다는 것을.•

• 튜링이 보편만능의 튜링 기계를 이용해서 어떻게 증명했는지는 어렵지 않다. 그 내용을 쉽게 소개한 참고문헌 6을 참고하기 바란다.

곧이어 불완전성 정리의 결론으로 한 걸음에 달려갔을 것이다. 모든 참인 명제를 빠뜨리지 않고 뱉어내는 기계 A가 있다면 그것을 관찰하면서 쉽게 멈춤문제를 판단하는 기계를 만들 수 있다. 멈춘다는 명제 혹은 멈추지 않는다는 명제, 둘 중 하나는 언젠가는 뱉어낼 것이므로. 그런데 멈춤문제를 푸는 기계는 불가능하다. 그러므로 기계 A는 존재할 수 없다고.

마무리

내 추측이긴 하지만 이게 튜링의 1935년이 아니었을까. 튜링이 괴델의 증명을 배우고 자신만의 방식으로 같은 것을 확인해간 시간. 그래서 1936년 논문을 완성해간 과정. 이 과정에서 모든 중요한 고비마다 그 해결의 실마리는 괴델의 논문에서 사용한 기법들과 거울을 마주하듯 짝지어진다.

추적한 대로, 튜링의 논문이 나온 과정을 세밀히 되밟아보면 의아해진다. 그 논문은 튜링이 꼭 천재였기 때문에 가능했던 건 아니지 않을까. 주변의 모두가 돕고 소중히 여긴, 자의식 넘친 우등생의 리포트 정도라고나 할까. 당시의 수학계를 휩쓴 센세이션(괴델의 불완전성 정리)을 학생들에게 자세히 강의해준 선생님. 그 강의를 들으면서 나도 그 정도 증명쯤은 할 수 있으리라는 자의식이 있었던 학생. 좀 더 손에 잡히는 모습으로 같은 결과를 색다르게 밟아간 줏대 있는 행보. 고비마다 방향을 잡아주던 괴델 논문 속의 힌트와 강의노트. 이 과정에서 자연스런 소품으로 등장한 컴퓨터의 원천 설계도. 이 색다른 방식의 증명을 지나치지 않고 소중히 기록으로 남기게 도와준 선생님.

이제 접어도 되지 않을까. 무책임한, 검토 안 된 신화. 튜링을 천재라고 수식하면서 불필요하게 주변을 겁주지 말자. 살펴본 바와 같이 청년 튜링이 그린 컴퓨터의 원천 설계도는 하늘이 낸 천재만의 범접 못할 성과는 아니지 않은가.

비슷한 성과는 우리 주변에서도 싹틀 수 있다고 본다. SKEPTIC

글 이광근

서울대학교 컴퓨터공학부 교수(홈페이지: kwangkeunyi.snu.ac.kr). KAIST 전산학과 교수, Bell Labs-Software Principles Research Department 정규 연구원, MIT, CMU, 파리 고등사범학교 방문교수, 교육과학기술부 지정 선도연구센터 센터장, 과학기술부 지정 창의연구단 단장을 역임했다. 지은 책으로《컴퓨터과학이 여는 세계》가 있다.

reference

1 Supplement: The Diagonalization Lemma (supplement to Gödel's Incompleteness Theorems). http://plato.stanford.edu/entries/goedelincompleteness/sup2.html. (downloaded on July 21, 2016), 2015.

2 Kurt Gödel. On Formally Undecidable Propositions in Principia Mathematica and Related Systems I (English translation by Martin Hirzel in November 2000). Original version: "Über Formal Unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und Verwandter Systeme I" in *Monatshefte für Mathematik und Physik* 38: 173-198, 1931.

3 Ernest Nagel and James R. Newman. *Gödel's Proof.* New York University Press, 1958.

4 Christos H. Papadimitriou. *Turing (A Novel about Computation).* The MIT Press, 2005.

5 Alan Turing. On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem. *Proceedings of the London Mathematics Scociety*, 43(1):230-265, 1937.

6 이광근.《컴퓨터과학이 여는 세계》. 인사이트. 2015.