1. 서론

인간이 동물과 구별되는 특징 중 하나는 ‘역사성’이다. 인간과 동물은 모두 특정한 시간과 공간 속에서 유한한 삶을 살아가는 존재라는 공통점을 가지고 있지만, 동물은 한 개체로서의 일대기가 있을 뿐인 반면 인간은 ‘인류’라고 집단화될 수 있는 종족 전체의 일원으로서 과거와 미래를 가지고 그 연장선상 위의 어느 한 점에서 살아간다. 다시 말하면, 인간은 동물에게는 없는 ‘역사’를 갖는다.[1] 인간은 이성을 잣대로 하는 판단능력과 지식의 축적을 통해 역사의 진행방향[2]을 만들어낸다.

인간이 역사를 갖는다는 것은 인간이 굉장히 효율적으로 생을 살아갈 수 있다는 것을 의미한다. 선대에 발견된 사실은 후대의 인간에게 다른 출발점을 제공하고, 이는 계속해서 새로운 발견으로 이어진다. 한 인간이 무에서 유를 창조하는 신이 될 수는 없지만, 각 개인의 생이 인류 차원에서 작은 한 걸음들을 이끌어내어, 결과적으로 거대한 변화를 이루어낼 수 있다. 사실 내가 삶에서 누리고 있는 이 모든 것이 정도의 차이는 있을지라도 모두 역사 속에서 발견되고 검증되고 쌓아올려진 결과물이라고 해도 과언이 아니며, 미래에는 다른 모습으로 변모할 가능성이 농후하다고 할 수 있다.

유례없는 도구라고 평가받는 컴퓨터 역시 마찬가지이다. 최초로 컴퓨터라는 개념을 만들어내고 그 개념을 물질화하기까지에는 수많은 논리학자와 공학자가 존재했다. 혹자는 컴퓨터를 공학의 산물이라 여기며 선뜻 논리학과의 연관성을 생소하게 느낄 수도 있다. 그러나 하드웨어의 구축이 실질적인 컴퓨터를 탄생시켰고 소형화, 상용화 등에 크게 기여하여 만능기계로서의 면모를 증폭시켰을지라도, 이는 이러한 설계를 가능하게 했던 컴퓨터의 논리적 발명이 있었기 때문이다. ‘보편기계’라는 개념을 처음으로 제시하고 지금 컴퓨터의 가장 기본이 되는 작동원리를 착안해 낸 앨런 튜링(Alan Turing)이 바로 그 논리적 발명가라고 할 수 있다. 튜링은 1936년 발표한 논문 「계산가능한 수에 대해서, 수리명제 자동판별 문제에 응용하면서」[3]를 통해 이 기계를 추상적으로나마 세상에 선보였다. 하지만 이 역시 천재소년 튜링이 어떤 작업이든 해내는 기계의 발명을 목표로 하고 창조해낸 것이라기보다는, 인간의 논리적인 사고 과정을 자동기계에 실현하려던 수학자들의 꿈과 이를 실현하려는 400년간의 노력이 축적되어 이를 출발점으로 삼을 수 있었던 튜링의 그 다음 발걸음에서 나온 것이다. 단적인 예로, 이 기계는 D. 힐베르트가 제시한 수리명제 자동판별 문제에 대한 반증 과정에서 그 부속품으로 등장한 것이기에, 힐베르트가 없었다면 이러한 발명은 이루어지기 힘들었을지도 모른다. 이러한 점에서 튜링이 1936년의 논문을 제출하기까지 역사적으로 수학논리학에서 어떠한 진보가 이루어지고 있었으며 직간접적으로 영향을 준 몇몇 학자들의 업적과 한계를 살펴보는 것은 컴퓨터를 이해하는 데 도움이 된다.

---

1) 물론 동물에게도 환경의 변화에 따른 생물학적 진화가 일어난다는 점에서 역사를 갖는다고 할 수도 있으나, 이는 생존을 위해 자연적으로 나타나는 변형일 뿐, 과거와 미래를 인지하고 주체적으로 변화를 만들어나가는 인간의 역사와는 차이가 있다.

2) 역사가 진보적인지, 퇴보적인지, 순환적인지 절대적 판단을 내릴 수 없으므로 여기서는 역사가 어떤 ‘진행방향’을 가지고 있다고만 서술하였다.

3) 원제는 「On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem」이다.

미국의 수학자 마틴 데이비스(Martin Davis)는 그의 저서 「The Universal Computer: The Road from Leibniz to Turing」(2000, Norton)에서 라이프니츠를 시작으로 부울, 프레게, 칸토어, 힐베르트, 괴델을 거쳐 튜링에 이르기까지 컴퓨터가 어떻게 발명될 수 있었는지 그 궤적을 추적하고 있다. 본 보고서는 이 저서를 중심으로 역사적인 관점에서 앞의 6명의 수학자들이 튜링의 1936년 논문 발표에 어떠한 공헌을 했는지 서술해보고자 한다. 이를 위해 먼저 튜링의 1936년 논문을 간단히 살펴보고 주안점을 짚어본 후, 그 이전의 수학자들의 성과를 이 논문과의 연관성 속에서 개별적으로 한 고찰한 다음, 다시 튜링의 논문으로 돌아와 그 결과를 일목요연하게 정리해볼 것이다.

2. 튜링, 1936년 논문

1) 논문의 개략적 이해

튜링 이전의 수학자들의 성과가 튜링의 논문에 어떠한 공헌을 했는지 구체적으로 이해하기 위해서는 튜링의 1936년 먼저 논문을 살펴볼 필요가 있다. 「계산가능한 수에 대해서, 수리명제 자동판별 문제에 응용하면서」라고 이름 붙여진 이 논문은 11개의 장으로 구성되어 있는데, 크게 3개의 부분으로 나눌 수 있다.

먼저 튜링은 ‘계산가능한 수’를 정의하고 자신이 만든 기계를 소개한다. 튜링은 실제 사람이 계산을 할 때 하는 행위를 본 따 마음상태에 따라 읽어 들이는 정보를 가지고 정해진 알고리즘대로 계산을 하는 기계를 고안했다. 이 기계에 의해 쓰일 수 있는 10진법의 수가 바로 계산가능한 수이다. 다음으로 튜링은 규칙표를 테잎에 입력 받아 어떠한 계산도 할 수 있는 하나의 보편만능의 기계를 고안한다. 이는 기호화되어있는 규칙표를 부호수로 인코딩하는 과정을 통해 가능하다. 마지막으로 이 기계를 통해 논문의 본 주제라고도 할 수 있는 힐베르트의 수리명제 자동판별 문제에 대한 답을 내린다. 괴델의 불완전성 정리를 따라 칸토어의 대각선논법을 이용하면서 기계로 하여금 멈춤문제를 푸는 알고리즘은 없다는 것을 증명한다.

2) 논문의 주안점

이러한 논문은 어떠한 맥락에서 나올 수 있었을까? 수학자들의 공적을 효율적으로 추출해내기 위해, 다음 세 가지로 주안점을 크게 묶고 정리해보았다.

- *논문 주제를 설정하게 된 배경은 무엇인가?* : 튜링은 힐베르트가 제기하였고 괴델이 불가능하다고 증명한 ‘수리명제 자동판별’ 문제에 초점을 맞추고 있다. 그렇다면 이 문제가 의미하는 바가 무엇이며 힐베르트가 문제화하기까지 어떠한 담론이 형성되어왔는가? 특히 논리의 수학적 연역을 다루고 있다는 점에서, 수학 논리학은 어떠한 발전 과정을 거쳤는가?
- *어떠한 논증 방법을 사용하고 있는가?* : 튜링은 기본적으로 괴델의 논증 방법을 따라가고 있다. 또한 여기에는 간접적 증명법 중 하나인 귀류법과 반례법이 주축이 되

었다고 할 수 있다. 그리고 멈춤문제를 풀기란 불가능하다는 논증에서 칸토어의 대각선 방법이 직접적으로 사용되었다. 이러한 논증 방법은 어떻게 발전했는가?
- *논증 과정의 부품으로 사용된 '튜링 기계'는 어떻게 만들어졌는가?* : 튜링은 '계산'을 알고리즘을 통해 수행하는 튜링 기계를 부품으로 활용하고 있다. 하나의 논리적 명제를 수학적으로 표현한다는 것은 기호 논리학과 밀접한 관련이 있다. 입력한 기호들을 기계가 읽어 들이고 작업을 수행한다는 점에서 하나의 튜링 기계가 인공 언어를 사용하고 있다고 할 수 있다. 이 인공 언어는 어떻게 탄생했는가? 또 단순한 계산기가 아니라, 기계·데이터·프로그램을 하나로 통합시킨 논리적 계산 기계라는 발상 자체가 어떻게 나오게 되었을까? 어떠한 선구적 업적을 바탕으로 추상적으로나마 이 기계를 설계할 수 있었을까? 나아가 인공 언어 체계에서 표현 가능한 논리식을 입력 했을 때 인코딩 과정을 통해 무한대에 가까운 작업을 수행할 수 있는 하나의 '보편 기계'의 고안과 구현은 어떻게 가능했을까?
이러한 질문을 염두에 두고 다음 장에서는 어떤 수학자들이 어떤 선구적 업적을 해냈는지 알아볼 것이다.

3. 선구적 업적을 일구어낸 수학자들

1) 라이프니츠 : 기호의 힘으로 꿈을 설계하다

라이프니츠는 기호의 위력을 일찍이 알아차렸다. 그는 자신이 발견한 미적분 계산에 있어 필요한 수학규칙을 표현하는 데에 기호를 사용했는데, 뉴턴의 복잡한 표기와 달리 기호 $\int$, d는 핵심기법이 저절로 사용되게 하였다. 라이프니츠는 이러한 표기법의 유용성을 곧 간파했다. 소리가 아닌 하나의 개념을 표현하고 있는 문자를 만들어낼 수 있다는 것은 라이프니츠에게 아주 매력적으로 다가왔다. 라이프니츠는 이를 포괄적 범위에서 이해하고, 이 표기가 문장을 이루는 하나의 원소로서 작용한다면, 거꾸로 논리적인 명제를 이러한 표기들로만 나타낼 수 있을 것이라 생각하였다.

여기서 라이프니츠의 꿈이 설계되기 시작한다. 이 특별한 문자체계 상에서는 문장의 논리 구조를 단순화시킬 수 있다. 이러한 체계는 기호를 사용하는 표기법이 단순한 소리나 하나의 단어가 아니라 구체적인 개념을 나타낸다는 점에서 '실제 기호체계'라고 불릴 수 있다. 이는 기존의 언어가 새로운 언어로 '번역'된다는 단순한 의미를 넘어서는 것이다. 논리 구조를 단순화시킴으로써 인간의 인지작용의 영역에 해당되던 논리적 관계의 표현을 기호화 할 수 있다는 것은, 곧 인간의 모든 사고 범위를 완벽히 표현하는 '보편 기호체계' 또한 가능하다는 꿈으로 이어지게 되었다.

라이프니츠의 꿈은 여기서 그치지 않았다. 라이프니츠는 당시 '라이프니츠의 계층통(wheel)'을 결합시켜 사칙연산까지 포괄하는 계산기의 발명에 성공한 상태였다. 이에 라이프니츠가 보편 기호체계 안에서 표현될 수 있는 논리적인 상호 관계를 밝혀 줄 계산법, 나아가 이러한 계산을 실행할 수 있는 기계를 꿈꾸게 된 것은 자연스러운 전개이다. 라이프니츠는 특별한 문자 체계에 바탕을 둔 언어는 수학적 판별이 가능한

기호들로 이루어졌기 때문에, 이 언어로 쓰인 문장들이 참인지, 그리고 문장들 사이에 존재하는 논리적 관계가 무엇인지 기호 간 연산을 통해 기계로 결정하는 것이 가능하다고 생각하였다. 기호만으로도 한 번에 문장과 문장의 논리관계를 나타내고, 나아가 기호들 간의 연산의 결과로서 참과 거짓을 자동으로 판별하는 것, 이것이 라이프니츠의 궁극적 꿈이 되었다. 이는 곧 인간 이성의 영역에서만 가능하였던 논리적 사고를 기계의 계산으로 환원하고자 하는 원대한 시도였다. 이러한 환원을 가능하게 하는 것은 앞서 말한 인공 언어이다. 이 꿈은 백과사전을 만들고 기본이 되는 핵심 개념을 선택한 다음, 기호를 부여하고 연역법을 기호들의 조작으로 환원하는 과정을 통해 이루어질 수 있다고 생각했다. 기호논리학의 출현이었다.

이렇게 인공 언어를 바탕으로 논리적인 계산을 하는 튜링 기계의 밑그림은 400년 전에 그려졌다. 긴 시간이 지난 만큼 튜링의 논문에 개별적이고 직접적인 영향을 미쳤다고 하기는 모호한 부분이 있으나, 이후 튜링의 논문에 지대한 영향을 미친 기호와 논리에 관한 연구의 발전에 하나의 수렴 가능한 목표를 설정하여 길을 인도한 것이 바로 라이프니츠이기 때문에 무엇보다 큰 공헌을 했다고 할 수 있다. 라이프니츠가 출범시킨 기호 논리학은 부울, 프레게를 통해 정교화되어 튜링 기계가 이러한 언어를 바탕으로 작성된 알고리즘을 수행할 수 있게 되었다. 튜링 기계는 기본적으로 모든 것이 기호로 표현된 명제를 기호로서 읽어 들이고 다시 기호를 산출한다. 라이프니츠의 기호에 대한 통찰력이 없었다면 튜링 기계의 등장은 힘들었을 것이다. 또한 라이프니츠의 궁극적 꿈이었던 수리 명제 판별에 관한 기계는 훗날 힐베르트에 의해 '수리명제 자동판별'이라는 이름으로 문제화되어 그 가능여부가 튜링 논문의 주제가 되었다. 이 점에서 튜링 논문의 가장 큰 틀은 라이프니츠에 의해 만들어졌다.

2) 부울 : 논리대수를 통해 논리적 관계의 '연산'을 가능하게 하다

부울 역시 라이프니츠와 같이 기호의 유용성에 대해 관심을 가지고 있었다. 특히 부울이 초점을 맞춘 것은 수학 기호법, 대수적 방법이었다. 부울은 자신의 연구를 수행해가는 과정에서 대수에 있어서 연산을 의미하는 기호는 항상 일정한 기본 법칙에 따르게 된다는 사실에 흥미를 가지게 되었다.

한편, 부울은 논리적 명제에서 서술되는 개체들을 집합으로 표현할 수 있다는 점을 깨닫게 되었다. 또한 이러한 집합을 나타내는 데 숫자나 연산자를 나타낼 때 한 것처럼 문자들을 사용하였다. 여기서 부울은 이 집합들 간의 관계, 즉 문자들 간의 논리적 관계에 자신이 초점을 맞추고 있던 '대수'를 적용할 수 있다는 생각을 하게 되었다. 집합들 간의 논리적 관계가 대수에서 사용하는 연산 표기법을 통해 실제 일반 대수의 연산과 유사하다는 것을 발견한 것이다. 한 문자는 집합을 나타내기 때문에, 어떤 두 집합을 곱셈으로 나타내면 이는 곧 교집합을 의미하고, 어떤 두 집합을 덧셈으로 나타내면 이는 곧 합집합을 의미하며, 어떤 두 집합을 뺄셈으로 나타내면 이는 곧 여집합을 의미하는 것이 된다. 논리적 관계가 집합 사이의 연산을 통해 표현될 수 있다는 것은, 다시 말하면 논리적 명제가 '계산'될 수 있다는 것은 이러한 작업을 수행

하는 기계의 탄생을 예견하는 것이다. 이는 라이프니츠의 꿈이 실제적으로 가능하다는 것을 보여준 것이다. 부울의 이 발견은 튜링 기계의 원칙적 작동방식에 공헌했다.

부울은 여기서 좀 더 나아가 다음과 같은 사실을 발견했다. 숫자와 논리 명제에 적용되는 연산이 차이를 보이는 곳이 있는데, xx의 결과는 일반대수에서는 x^2이지만, 집합들의 논리적 관계를 생각해보면 x^2은 곧 x이다. 이에 부울은 연산에 대해서 참이 되도록 하는 경우를 일반 대수식의 차원에서 생각해보았고, 하나의 집합 값이 0 또는 1의 두 가지 값으로 제한된다면 요구를 만족시키는 것이 된다고 결론지었다. 이 두 가지 값이 구성하는 집합들은 이후 컴퓨터의 가장 기본적인 정보구성 단위로 사용되기에 이른다. 또한 집합의 의미에서 0은 공집합, 1은 전체 집합이나 마찬가지이다. 이는 '어떤 것도 주어진 집합 x에 속하면서 동시에 속하지 않을 수는 없다'를 x(1-x)=0로 표현할 수 있다는 것까지 확장되어, 부울의 논리대수는 아리스토텔레스의 삼단논법을 포함, 사실상 뛰어넘는 실용적인 기호논리학의 탄생을 의미하게 되었다. 이렇게 논리적 대수의 연산이 일반적인 대수의 연산과 정확히 일치되자, 부울의 논리대수는 클라크의 복잡한 연역법을 간단한 식의 집합으로 환원할 정도로 그 유용성이 커지게 되었다. 연산자에 대수적 방법을 적용함으로써 일반 논리적 추론을 수학적 연산으로 옮긴다는 것은 인간의 사고 체계를 수식으로 환원할 수 있다는 가능성을 보여주었다.

하지만 대수적 방법으로만은 논리적 구조를 포착하고 표현해내기가 어려운 명제가 있다. 예를 들어 '모든 실패한 학생은 어리석거나 게으르다'라는 이 문장은 부울의 논리대수로 표현 불가능하다. 이에 부울의 논리대수는 라이프니츠가 제시한 '보편 언어체계'의 가능성을 높여주고 실제적인 모습을 제시했지만 그 완벽한 언어를 구현해냈다고 하기는 어렵다. 그럼에도 원칙적으로 기계가 계산 가능한 논리적 표현방식을 마련했다는 점에서 튜링의 논문에 큰 공헌을 했다고 할 수 있다.

3) 프레게 : 모든 연역적 추론을 설명하는 규칙체계를 마련하다

부울의 논리대수를 뛰어넘는 논리학의 수학적 처리법이 나오지 않는다면 라이프니츠의 꿈은 실현되지 못할 것이었다. 수학 논리학의 표기법을 완성하고 나아가 실제적으로 튜링 기계가 계산할 수 있는 새로운 언어를 창조한 이는 바로 프레게이다.

프레게는 논리적 명제를 다룸에 있어서 혼란을 일으킬 수 있는 일반 대수 기호 대신 독자적인 특수 기호를 도입해야 할 필요성을 느꼈다. 그는 《개념표기법》이라는 소책자를 통해 ∀(모든), ∃(어떤), ⊃(~이면 ~이다), ∨(또는), ∧(~이고 ~이다), ¬(아니다) 등과 같은 자신만의 표기를 소개했다. 예를 들어 'x는 y를 사랑한다.'를 L(x,y)로 표현하고, '애인이다'를 단순히 어떤 사람을 사랑한다고 해석한다고 했을 때, '모든 사람은 애인을 사랑한다.'라는 문장은 '(∀x)(∀y)[(∃z)L(y,z)⊃L(x,y)]'로 표현될 수 있다. 실제 인간 사고의 법칙은 이와 같이 가장 낮은 연산 단계로 파편화시켜 이해할 수 있다. 즉 개념표기법은 어떤 연역적 추론도 수학적으로 표기 가능하다는 것을 완전하게 보여주었다. 게다가 이 단순하지만 정교한 체계는 기존 논리학에서는 구분되지 않는 논리 형식들까지 수학적 형식으로 표현 가능하게 하였다. 예를 들어 논리학에서 '금성

은 샛별이다.'와 '금성은 금성이다.'라는 두 문장은 같은 의미이지만, 프레게의 표기법은 이 둘을 구별할 수 있다. 이렇게 프레게의 수학적 형식화는 혁명적으로 전통 논리학을 넘어섰고, 언어철학의 태동에 기여하였다.

한편 프레게의 개념표기법을 통해서는 명제들 간의 논리적 관계를 파악하고 이를 다시 2차적으로 표현할 필요 없이, 명제들을 연결하는 관계들로 인해 자체의 구조를 해석할 수 있게 된다. 이 정밀한 규칙을 잘 지키기만 하면 기호들이 배열된 방식만을 통해서 논리적 추론을 하는 것이 가능해진다. 이는 프레게의 표기법이 논리학의 수학적 처리법을 완벽하게 해냈을 뿐 아니라, 하나의 문법을 갖는 인공 언어를 탄생시켰음을 의미한다.

프레게로 인해 수학 논리학은 모든 논리적 추론을 포괄하게 되었다. 또 문법을 통해 한 기호가 무엇을 의미하는지 몰라도 연산을 실행하는 것이 가능하게 되어, 기계적 조작을 가능하게끔 하였다. 어떠한 수학적 계산도 표기할 수 있고, 이를 기계가 읽어들이며 주어진 명령을 수행할 수 있게 한다는 그 발상은, 튜링의 보편 기계 고안에 지대한 영향을 미쳤다. 이로써 사실상 논리적 계산을 해내는 튜링 기계의 발명에 필요한 모든 원칙이 마련됐다고 할 수 있다.

하지만 프레게의 개념표기법은 전제로부터 결론을 연역적으로 추론할 수 있게 하는 계산 절차에 대한 어떠한 단서도 주지 않는다. 라이프니츠의 가장 궁극적인 꿈을 실현할 어떤 단서도 제공하지 못한 것이다. 또한 프레게는 러셀의 편지로 집합들의 집합에 관한 추론이 쉽게 모순에 이를 수 있다는 사실을 알게 되었다. 엄청난 실의에 빠진 프레게는 자신의 모든 연구가 쓸모없다고 여기게 되는 상황까지 봉착했다.

4) 칸토어 : 대각선 방법을 개발하고, 수학계에 반향을 일으키다

튜링 기계의 조작적 원칙은 모두 마련되었지만 튜링은 이를 수리명제 자동판별 문제의 증명에 대한 부속품으로 사용했다. 그렇다면 자동판별 문제는 언제부터 수학자들의 화두였을까? 라이프니츠의 원대한 꿈이 그 시작이었지만, 수학자들 간의 논쟁을 유발하여 이 문제를 공식화하게끔 직접적 원인을 제공한 사람은 칸토어이다.

칸토어는 금기된 개념으로 일컬어지던 실무한(완결된 무한)에 관심을 가지고 있었다. 이미 라이프니츠에 의해 무한집합을 세는 방법으로 일대일 대응 방식[4]이 알려져 있었다. 그런데 완결된 실무한인 자연수 집합의 원소를 짝수 집합의 원소와 일대일 대응시키면 자연수의 개수와 짝수의 개수가 똑같다는 결론이 나온다. 자연수는 짝수와 홀수로 이루어진다는 점에서 전체와 부분이 같다는 이 결론은 가장 기초적인 수학적 원리를 위반하는 것이다. 여기서 연구를 멈춘 라이프니츠와는 달리 칸토어는 이 결론을 받아들이며 또 다른 무한집합을 살펴보기로 했다. 칸토어는 유리수, 대수적 수는 자연수와 일대일 대응이 가능하지만 $2^{\sqrt{2}}$, π와 같은 초월수를 포함하는 전체 실수 집합은 자연수 집합과 일대일 대응이 불가능하다는 사실을 대각선 방법[5]을 통해 알아차렸다.

4) 사람들의 수를 정확히 모르더라도 빈 의자가 없다면 의자의 수와 사람들의 수가 똑같다고 할 수 있듯이, 일대일 대응이 가능한 두 무한집합은 크기가 같다고 할 수 있다.

이는 곧 무한집합이 적어도 두 가지 크기를 가진다는 의미가 된다. 한 집합의 원소들의 개수를 그 집합의 '기수'라고 표현할 때, 칸토어는 자신이 알아낸 결과를 확장시켜 '$\aleph_0$(자연수 집합의 기수)과 C(실수 집합의 기수) 사이에는 어떤 기수도 없다'는 '연속체가설'로 정리했다. 칸토어는 이를 증명하고자 먼저 '초한 서수(ω)'의 개념을 사용하여 무한집단의 원소들을 다양하게 배열, 다양하게 순서를 매기고자 했다. 칸토어는 초한 서수들의 집합의 기수가 $\aleph_0$ 바로 다음의 기수라는 것을 증명하는 데 성공하여 이를 $\aleph_1$로 표기하였다. 이제 남은 것은 '$\aleph_1 = C$'를 증명하는 것이었다.

하지만 이 때 러셀로부터 '모든 집합들의 집합이 있을 수 있는가?'하는 역설이 제기되면서 칸토어의 초한 연구는 수학계에 큰 반향을 일으키는 꼴이 되었다. 일부는 이를 지키고자 했고, 다른 일부는 이러한 추상적이고 금기적인 수학은 폐기되어야 한다고 주장했다. 이러한 논쟁이 힐베르트로 하여금 프로그램에 대한 꿈을 꾸게 하고, 이 과정에서 튜링의 논문이 나오게 되었다. 따라서 칸토어의 공헌은 직접적이지는 않지만 이러한 논쟁을 촉발시킴으로써 추상적인 수학의 세기를 여는 데 있다고 할 수 있다. 게다가 이후에 살피겠지만, 괴델이 불완전성 정리를 발표하며 제시한 사례가 바로 칸토어의 연속체가설이다. 이처럼 칸토어는 누구도 감히 행하지 못한 실무한의 세계를 정교하게 연구함으로써 수학계에 큰 반향을 일으키고 새로운 생각이 싹틀 수 있게 터를 닦은 수학자라고 할 수 있다.

한편, 칸토어가 C가 $\aleph_0$보다 크다는 것을 증명하는 과정에서 개발한 대각선 방법은 튜링이 자신의 기계를 이용하여 자동판별 문제가 불가능하다는 것을 증명하는 데 사용되었다. 이는 직접적인 공헌이라 할 수 있다.

5) 힐베르트 : 프로그램을 개발하고 수리명제 자동판결 문제를 제시하다

칸토어의 연구는 많은 공격을 받았다. 그의 스승이었던 크로네커도 반대자 중 한 명이었는데, 그는 존재에 대한 수학적 증명은 그 실체들을 명시적으로 보여줌으로써 '구성적'으로 이루어져야 한다고 믿는 직관주의자였다. 하지만 힐베르트는 추상적 사고의 위력을 알고 있었다. 당시 핵심 불변식에 관한 고르단의 추측을, 복잡한 형식적 조작 대신 귀류법을 이용하여 증명에 성공한 힐베르트는 크로네커의 주장에 동의하지 못했다. 그는 추상적 사고를 바탕으로 완벽한 수학 기초론을 만들어낼 수 있다는 자신의 확신을 하나의 프로그램 형태로 제시하여, 수학계를 새로운 국면에 접어들게 했다.

힐베르트는 1900년 8월 수학 국제회의에서 23개의 문제를 제출하였다. 그는 어떤 문제든 정확한 해법만 있다면 풀릴 수 있다며 그 첫 번째로 칸토어의 연속체 가설을 제시했다. 이는 힐베르트가 연속체 가설이 충분히 가치 있고, 풀릴 수 있는 문제로 상정하고 있음을 말해주는 것이었다. 두 번째 문제는 실수의 산술에 대한 공리들의 무모순성을 밝히는 것이었다. 기하학에서의 유클리드 공리와 같이, 산술적인 이론체계

---

5) 수 1, 2, 3…과 전체 자연수 집합의 모든 부분 집합($M_1, M_2, M_3 \cdots$) 사이에 일대일 대응을 한다고 했을 때, 대각선 방향에 놓여있는 수를 반대로 포함하는(즉, 1이 M_1에 속하면 넣지 않고, 2가 M_2에 속하지 않으면 넣는 방법) 집합 M은 어떤 집합들과도 전혀 다른 새로운 집합이다. 즉, 어떠한 대응도 자연수들의 모든 집합을 표현할 수 없다. 이 때 모든 자연수 집합들의 집합의 기수가 바로 C의 기수이다.

내부에서도 무모순성을 띠는 몇 개의 기본 공리를 정할 수 있고, 이로부터 모든 명제가 도출될 수 있는 연역적 체계화가 가능할 것이라는 믿음에서 나온 것이었다. 힐베르트의 호기로운 도전과제는 큰 열광을 받았다. 러셀과 화이트헤드는《수학 원리》를 통해 산술의 무모순성 문제는 해결의 가능성을 높여주는 것처럼 보였다.

하지만, 푸앵카레는 힐베르트가 증명 과정에서 사용한 방법들이 이미 모순에 이를 수 없다고 상정된 증명 속에서 사용되었기 때문에 순환 논증의 오류를 저질렀다고 지적했다. 직관주의의 맥을 이어받은 브로우웨르와 힐베르트의 제자였던 바일도 무한집합에서 배중률은 사용될 수 없고 무모순성은 중요한 문제가 아니라고 비판했다.

이에 힐베르트는 좀 더 대담한 구상을 하기 시작했다. 그는 기호논리학에 입각해 형식적인 기호 언어로 이루어지는 수학, 즉 메타수학을 만들어냈다. 메타수학 안에서는 기호들의 배열만이 중요하다. 이렇게 되면 논리적 관계만이 뚜렷하게 부각되기 때문에, 순수한 구조적 특성의 분석에 의해 수학체계 내부의 무모순성을 증명하는 것이 가능해진다. 증명 방법에 있어서는 논쟁의 여지가 전혀 없는 제한된 ‘유한의 방법’들만 사용하기 때문에 푸앵카레의 비판에서 벗어날 수 있다. 또한 형식을 통해 수학에는 절대 모순이 없다는 것을 증명하는 것이므로, 직관주의보다 우위에 서는 것이 된다. 이제 무모순성 증명은 기호논리학이 완전하다는 것, 그리고 기호논리학을 기반으로 수리명제 자동판별이 가능하다는 것만 밝혀지면 이루어지는 것이었다.

이렇게 수리명제 자동판별 문제(Entscheidungsproblem)는 하나의 구체적인 과제로 세상에 등장하였다. 기호논리학에 기반을 두는 어떤 논리식이 타당한지 아닌지를 결정할 수 있다는 것은 라이프니츠의 꿈과 일맥상통한다. 힐베르트의 수학 기초 정립에 대한 열정 덕분에 라이프니츠의 꿈이 가시화될 수 있었고, 그 증명과정에서 괴델의 정리를 거쳐 튜링 기계가 탄생하게 되었다. 또한 직관주의자들에게 끝까지 맞서 수학의 추상성을 지켜내어 튜링이 귀류법을 통한 증명이 일리 있음을 확보해 놓았다고도 할 수 있다. 그리고 힐베르트는 자동판별 문제가 모든 연역적 추론을 계산으로 환원해주는 알고리즘에 의해 해결될 수 있다고 보며 유례없는 범위까지의 알고리즘 사용 확장을 요구했다. 이는 튜링이 알고리즘을 기반으로 튜링 기계를 만들어내는 데 아주 큰 공헌을 했다.

6) 괴델 : 불완전성 정리를 통해 해답을 제시하다

튜링은 괴델의 불완전성 정리에 대한 수업을 듣고 나서 1936년 논문을 작성하게 되었다. 튜링은 논문의 서문에서 자신의 증명은 괴델의 증명을 모델로 하여 기본 흐름을 따라간다고 밝히고, 이 과정에서 자신이 만들어낸 기계를 활용한다고 했다. 즉, 괴델은 튜링의 논문에 가장 직접적인 공헌을 한 인물이다.

괴델은 우선 힐베르트의 문제를 명확히 했다. 괴델에 따르면 힐베르트의 문제를 푼다는 것은, 문자의 의미나 해석이 변할지라도, 형식적인 면에서 전제를 참이 되게만 한다면 결론도 항상 참이라는 이 사실을 기호논리학의 규칙에 의해 도출해낼 수 있다는 것을 증명해야 한다. 이는 기호논리학의 규칙(PA)이 완전하다는 의미이고 이는 곧

산술의 무모순성 증명으로 연결된다.

이를 증명해보이기 위해 괴델은 러셀과 화이트헤드의 일반 수학처럼, 메타수학을 형식 논리 체계 내부에서 전개할 수 있는지 검토해보게 되었다. 외부에서 체계들은 기호열 사이의 관계를 포함하고 내부에서는 수학적 명제를 표현한다. 내부에서 표현되는 수학적 대상에는 자연수도 표현된다. 여기에 착안하여 괴델은 기호를 각각 하나의 숫자로 대응되게끔 하였다. 그러자 외부에서 기호열로 표현되는 모든 것은 자연수에 관한 산술적 명제로 표현될 수 있었다. 자연수로 부호화되는 과정은 처음으로 메타수학적 개념이 언어 자체에 구현될 수 있다는 것을 보여주는 것이었다. 이는 라이프니츠가 꿈꿔왔던 인공 언어의 궁극적 모습이었다.

다음으로 괴델은 외부에서는 분명히 참인 메타수학적 명제가 내부에서는 증명될 수 없는 경우가 있음을 밝혀냈다. 명제 U에 대하여 칸토어의 대각선 방법을 사용하면, ‘증명 불가능하다고 주장되어지는 명제(U)’와 ‘이 주장을 하는 명제(U)’가 같을 수 있다. 이는 외부적인 관점에서 보았을 때 참이지만, 내부에서는 절대 증명 불가능한 것이다. 형식 논리 체계 내부에서 비록 표현되고 있을지라도 자신의 무모순성을 증명해낼 수 없는 것이다. 이를 두고 괴델은 “수학적 진리의 범위는 어떤 주어진 형식 체계에서 증명될 수 있는 것을 넘어선다.”고 하였다. 증명될 수 없는 명제가 존재한다는 것은, 힐베르트의 제시한 ‘수리명제 자동판결’이 불가능하다는 것을 입증했다. 이렇게 힐베르트의 문제는 증명하는 것이 ‘불가능하다’라는 증명에 의해 사형선고를 받았다. 덧붙여 괴델은 칸토어의 연속체 가설 역시 ‘반증이 불가능하다’는 증명을 하여 결정불가능한 명제라고 주장하였고, 이는 이후 입증되었다.

괴델이 불완전성 정리를 연구하는 과정에서 쓰인 자연수로의 부호화는 완전히 인간 사고가 계산될 수 있는 형식으로 정리될 수 있음을 보여주었다. 튜링은 이 점에 착안하였다. 수리명제 자동판별 문제는 그 결론이 났지만, 튜링은 이와 같은 인공 언어가 탄생한 상황에서 이를 라이프니츠의 꿈대로 기계를 통해서도 증명할 수 있음을 알아차렸다. 튜링이 하나의 보편 기계를 만들 때 사용한 방식이 바로 자연수로의 인코딩이다. 물론 이는 명제의 참과 거짓을 기계가 연산하여 판별하는 것이 불가능하다고 하여 라이프니츠의 궁극적 꿈은 실현불가능한 것이라는 사실을 입증하는 것이었다. 하지만 그 과정에서 완전히 새로운 시대를 열게 될 컴퓨터가 탄생하였다.

4. 연장선상에서 존재하는 튜링

지금까지 수학자들이 튜링의 논문에 공헌한 바를 개별적으로 살펴보았다. 튜링의 창의성이 돋보이기는 하지만, 대부분의 요소는 400년 간 수학자들의 단계적인 성과에 힘입어 비로소 발현된 역사적 산물임을 알 수 있다. 구체적으로 어떤 요소들이 누구에게 영향을 받았는지 뚜렷이 경계 짓기는 어려우나, 앞의 주안점을 토대로 그 결과를 일목요연하게 정리하면 다음 쪽의 표와 같다.

표에서 기울인 글씨는 튜링에게 미친 영향을 서술한 것인데, 이를 종합해보고 글을 마치고자 한다. 튜링은 괴델의 불완전성 정리를 바탕으로, 수리명제 자동판별 문제가

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">주제 설정</th><th rowspan="2">논증방법</th><th colspan="2">튜링 기계</th></tr>
<tr><th>인공 언어</th><th>기계의 구현</th></tr>
<tr><td>라이프니츠</td><td colspan="4">꿈의 설계: 인공 언어를 통해 인간 이성을 ‘계산’으로 환원하고, 계산을 실행할 기계의 구현
기호의 유용성 발견 인공 언어 개발에 영향, 튜링 기계의 구현에 기초원리</td></tr>
<tr><td>부울</td><td></td><td></td><td colspan="2">논리대수 발명. ‘계산’의 개념 변화</td></tr>
<tr><td>프레게</td><td></td><td></td><td>개념표기법으로 연역적 추론을 설명하는 규칙체계 마련</td><td></td></tr>
<tr><td>칸토어</td><td>무한집합 연구, 논쟁 촉발</td><td>대각선 방법 발견 멈춤문제 불가능 증명에 대각선 방법 이용</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>힐베르트</td><td>수리명제 자동판별 문제 제시. 라이프니츠의 꿈 공식 과제화</td><td>직관주의에 대응하여 추상적 증명법 주장&유지 기본 논증 방법으로 귀류법 사용</td><td>프레게의 규칙이 완벽하다고 증명</td><td>알고리즘에 따라 모든 연역적 추론이 계산으로 환원될 것을 요구 튜링 기계의 핵심은 알고리즘</td></tr>
<tr><td>괴델</td><td>불완전성 정리 튜링의 수업 주제</td><td>증명불가능한 명제 제시, 대각선 방법 이용 기본적으로 괴델의 증명단계 따라감</td><td>자연수 부호화를 통해 완벽한 인공 언어 탄생시킴 보편기계 제작 시 자연수를 이용한 부호수 사용</td><td></td></tr>
</table>

불가능하다는 것을 튜링 기계를 통해 증명하였다. 논증방법으로는 괴델을 모델로 하되 칸토어의 대각선 방법, 힐베르트가 수호했던 귀류법을 이용하였다. 라이프니츠의 꿈에서 시작된 인공 언어의 발달로 논리적 계산을 행하는 튜링 기계를 고안, 즉 단순한 기계적 구성 요소가 아닌 기계-프로그램-데이터를 통합한 기계를 처음으로 개발하게 되었다. 인공 언어는 라이프니츠의 기호의 유용성에 대한 강조로부터 시작되어 부울의 논리대수, 프레게의 표기법, 이에 대한 힐베르트의 안목과 선택, 괴델의 자연수화라는 단계를 거쳐 보편 체계적이고 계산 가능한 언어로 탄생하게 되었다. 튜링 기계는 힐베르트가 제안한 알고리즘을 기반으로 하여 계산을 수행하는 기계이다.

라이프니츠의 꿈이 컴퓨터의 발명으로 귀결될 줄은 어느 수학자도 예견하지 못했을 것이다. 이에 오늘날 컴퓨터의 발명에 있어 논리학자들의 공헌은 잘 알려져 있지 않다. 하지만 이 모든 성과들이 축적되어 논리적 계산을 수행하는 기계가 나오게 된 것은 분명하다.