

Homework 1
SNU 4910.210, Fall 2012
Kwangkeun Yi
due: 9/14(Fri), 24:00

이번 숙제의 목적은:

- 프로그래밍의 기본 부품을 조합해서 프로그램을 구성하는 것을 익힌다.
- 재귀적인 방식으로 프로그램하는 것을 익힌다.

Exercise 1 “유클리드gcd”

입력: 두 개의 음이 아닌 정수.

두 양의 정수의 최대 공약수를 구하는 함수 ($\text{gcd } n \ m$)를 정의하세요. 유클리드(Euclid)가 이용한 성질은, 간단한 성질을 이용한 재귀법이었다: n 과 0의 gcd는 n 이고; n 과 m 의($n \geq m$) gcd는 $n - m$ 과 m 의 gcd와 같다. \square

Exercise 2 “튜링2”

입력: 하나의 정수.

컴퓨터의 디자인을 선보인 튜링(Alan Turing)의 1936년도 논문¹에 두 번째 예로 든 프로그램이 $001011011101111\cdots$ 을 출력하는 프로그램이었다. 그 함수의 변종인 t_2 를 작성하세요: $(t_2 \ n)$ 은 $0010110111\cdots \underbrace{01\cdots 1}_{|n|}$ 를 출력한다. \square

Exercise 3 “양휘3”

입력: 하나의 정수.

¹“On Computable Numbers, with an Application to Eintscheidungsproblem”, *Proceedings of the London Mathematical Society, ser.2, vol.42, pp.230-265., 1936.*

중국의 양휘는 13세기에 이미 “파스칼의 삼각형”으로 알려진 것을 고안해서 계산에 이용한 기록이 있다:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 & & & & & & & & \vdots
 \end{array}$$

정수를 입력으로 받아서 파스칼 삼각형의 그 횡까지를 연속해서 출력하는 함수 yanghui를 작성하세요: (yanghui n)은 1111211331... $\underbrace{1 \dots 1}_{|n|\text{번째 횡}}$ 를 출력한다. 0번째 횡은 아무것도 존재하지 않는다. □

Exercise 4 “좋은사이”

입력: 두개의 정수 리스트. 빈 리스트도 리스트.

두개의 정수 리스트를 받아서 각 리스트의 원소들을 차례대로 사이사이에 끼워주는 함수 zipper를 작성하세요: 즉, (zipper '(1 2 3) '(4 5))는 (1 4 2 5 3)을 만들어낸다. 빈 리스트는 무시된다. □

Exercise 5 “좋은사이들”

입력: 정수 리스트의 리스트. 빈 리스트도 리스트.

정수 리스트의 리스트를 받아서 각 리스트의 원소들을 차례대로 사이사이에 끼워주는 함수 zipperN을 작성하세요: 즉, (zipperN '((1 2 3) (4) (9 10 11)))는 (1 4 9 2 10 3 11)을 만들어낸다. 빈 리스트는 무시된다. □

Exercise 6 “k진수”

일반적으로 k진수($k > 1$)는 다음과 같이 표현한다.

$$d_0 \dots d_n$$

여기서

$$\forall d_i \in \{0, \dots, k-1\}.$$

그리고 “ $d_0 \dots d_n$ ”은 크기가

$$d_0 \times k^0 + \dots + d_n \times k^n$$

인 정수를 표현한다.

이것을 살짝 확장해서 “ k 진수”를 다음과 같이 정의해보자. 표현은

$$d_0 \cdots d_n$$

여기서

$$\forall d_i \in \{1 - k, \dots, 0\} \cup \{0, \dots, k - 1\}.$$

그리고 “ $d_0 \cdots d_n$ ”은 크기가

$$d_0 \times k^0 + \cdots + d_n \times k^n$$

인 정수를 표현한다.

예를 들어, 2진수의 경우를 생각하자. 베이스가 $\{-1, 0, 1\}$ 이 되겠다. 0이 0을, +가 1을 -가 -1을 표현한다고 하면, +는 1을, +0+는 5를, +-는 -1을, +-0-는 -9인 정수를 표현한다.

이러한 2진수 N 의 집합을 귀납적으로 정의하면 다음과 같다:

$$\begin{array}{l} N ::= 0 \\ \quad | + \\ \quad | - \\ \quad | 0N \\ \quad | +N \\ \quad | -N \end{array}$$

그리고, Scheme에서는 2진수 N 을 다음과 같은 방법 \underline{N} 에 의해 Scheme의 리스트로 표현할 수 있다:

$$\begin{aligned} \underline{0} &= 'z \\ \underline{\pm} &= 'p \\ \underline{-} &= 'n \\ \underline{0N} &= (\text{cons } 'z \underline{N}) \\ \underline{+N} &= (\text{cons } 'p \underline{N}) \\ \underline{-N} &= (\text{cons } 'n \underline{N}) \end{aligned}$$

즉, 0+-는 Scheme에서

$$(\text{cons } 'z (\text{cons } 'p 'n))$$

로 표현된다, 왜냐하면

$$\begin{aligned} \underline{0+-} &= (\text{cons } 'z \underline{+-}) \\ &= (\text{cons } 'z (\text{cons } 'p \underline{-})) \\ &= (\text{cons } 'z (\text{cons } 'p 'n)). \end{aligned}$$

자 이제, 위와 같이 표현되는 2진수를 받아서 그것의 값을 계산하는 함수 `crazy2val`을 정의하라.

$$\text{crazy2val} : 2\text{진수} \rightarrow \text{정수}.$$

□

Exercise 7 “2진수 더하기”

두 2진수를 받아서 2진수의 합에 해당하는 2진수를 내어놓는 함수 `crazy2add`를 정의하라

$$\text{crazy2add} : 2\text{진수} * 2\text{진수} \rightarrow 2\text{진수}.$$

위의 `crazy2add`는 다음의 성질이 만족되어야 한다:

- 당연히, 임의의 2진수 z 과 z' 에 대해서

$$(\text{crazy2val} (\text{crazy2add } z \ z')) = (\text{crazy2val } z) + (\text{crazy2val } z').$$

- `crazy2add`은 재귀적으로 정의되어야 한다. 2진수를 10진수로 변형후 더해서 다시 2진수로 표현하는 과정은 불허.

2진수 두 개($d_0 \cdots d_n, d'_0 \cdots d'_m$)를 더하는 것은 각 자릿수 d_i 과 d'_i 를 더해서 만들어 진다. 이전 자릿수를 더해서 이번 자릿수로 넘어온 수(carry) c_i 를 생각해야 하므로, $d_i + d'_i + c_i$ 를 $i = 0$ 부터 더하면서 구할 수 있다.

□