SNU 4541.664A Program Analysis
Spring 2005
Note 15

Prof. Kwangkeun Yi

단순 타입 시스템 Simple Type System

- 타입 추론 규칙
- 추론 규칙의 안전성 증명

대상 프로그램

다음의 언어를 생각하자:

$$
\begin{array}{rcll}
e & \rightarrow & n & \text{정수} \\
 & | & x & \text{변수} \\
 & | & e + e & \text{덧셈} \\
 & | & \lambda x.e & \text{함수} \\
 & | & e\ e & \text{적용}
\end{array}
$$

식 e는 실행이 끝나면 정수나 함수를 내놓는다. 따라서, 실행결과 값은

$$v \rightarrow n \mid \lambda x.e \mid x$$

프로그램 실행은 다음의 기본적인 다시쓰기 과정의 반복:

$$n + n' \rightarrow (n + n') \qquad (\lambda x.e)\ v \rightarrow \{v/x\}e$$

어디를 다시 쓸지는 다음의 실행문맥이 결정:

$$\begin{array}{rcl} K & \rightarrow & [] \\ & | & K + e \mid v + K \\ & | & K\ e \mid v\ K \end{array}$$

프로그램의 실행 규칙은

$$\frac{e \rightarrow e'}{K[e] \rightarrow K[e']}$$

- 에러상태 = e가 값도 아닌데 진행($\rightarrow$) 할 수 없으면
- e가 "문제없이 실행" = e가 에러상태가 되지 않음

타입 시스템 = 형식 논리

- 논리식 생김새 "$e : \tau$"
- 논리식 의미 $[\![e : \tau]\!] = \mathsf{true}$
  iff "e 가 문제없이 실행되며, 끝난다면 그 결과는 τ 타입이다"
- 예:
  - $1 + 2 : \iota$
  - $(\lambda x.x)\ 3 : \iota$
  - $\lambda x.3 : \tau \to \iota$, 임의의 τ.
- 추론규칙(*inference rules*)은 "$\Gamma \vdash e : \tau$" 꼴을 유추 하는 규칙들
- 가정들 Γ
  - 변수들의 타입들에 대한 가정
  - $x + 1 : \iota$, 가정 $x : \iota$ 아래서.
  - $x\ 2 : \iota$, 가정 $x : \iota \to \iota$ 아래서.

$\Gamma \vdash e : \tau$를 추론하는 규칙

$$\frac{}{\Gamma \vdash n : \iota} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash x : \tau}\ x : \tau \in \Gamma$$

$$\frac{\Gamma \vdash e_1 : \iota \quad \Gamma \vdash e_2 : \iota}{\Gamma \vdash e_1 + e_2 : \iota}$$

$$\frac{\Gamma \vdash e_1 : \tau' \to \tau \quad \Gamma \vdash e_2 : \tau'}{\Gamma \vdash e_1\ e_2 : \tau}$$

$$\frac{\Gamma + x : \tau \vdash e : \tau'}{\Gamma \vdash \lambda x.e : \tau \to \tau'}$$

표기법 $\Gamma + x : \tau \stackrel{\text{def}}{=} \{y : \tau' \mid y \neq x, y : \tau' \in \Gamma\} \cup \{x : \tau\}$

계획: $\emptyset \vdash pgm : \tau$ 이면 $[\![pgm : \tau]\!] = \mathsf{true}$

추론의 예: 증명 나무

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\{x:\iota\}\vdash x:\iota}\; x:\iota \in \{x:\iota\} \qquad \dfrac{}{\{x:\iota\}\vdash 1:\iota}}{\{x:\iota\}\vdash x+1:\iota}}{\emptyset\vdash \lambda x.x+1:\iota\to\iota} \qquad \dfrac{}{\emptyset\vdash 2:\iota}}{\emptyset\vdash (\lambda x.x+1)\;2:\iota}$$

계획대로 되었는가? 올바른 추론 규칙인가?

임의의 프로그램 e에 대해서

$$\vdash e : \tau$$

이면

$$[\![e : \tau]\!] = \mathsf{true}$$

인가? 즉,

- e 가 문제없이 실행되며
- 끝난다면 그 결과는 τ 타입

인가?

증명 방법I

- Progress Lemma: 값이 나올 때 까지 문제없이 진행한다.
  $\vdash e : \tau$ 이고 e가 값이 아니면 반드시 $e \rightarrow e'$.
- Subject Reduction Lemma: 진행은 타입을 보존한다.
  $\vdash e : \tau$ 이고 $e \rightarrow e'$ 이면 $\vdash e' : \tau$.

증명 방법II

- $e \rightarrow error$를 정의
- Subject Reduction Lemma:
  $\vdash e : \tau$ 이고 $e \rightarrow e'$ 이면 $\vdash e' : \tau$.