SNU 4541.664A Program Analysis
Spring 2005
Exam I

May 6, 18:00-21:00

Problem 1 [10pts] 다음 집합을 귀납적으로 정의하라.

1. (3pts) 이진수의 집합.
2. (7pts) 거울 2진수 N에 1을 더한 거울 2진수를 M이라고 하면, 그런 관계쌍 (N, M)들의 집합.

   거울 2진수는 다음과 같이 정의된다:

   $$\begin{array}{rcl} N & \to & d \\ & \mid & d\,N \\ d & \to & \texttt{0} \mid \texttt{-} \mid \texttt{+} \end{array}$$

   일반적으로 "거울 k진수"는 $d_0 \cdots d_n$이고 베이스가 $\forall d_i \in \{1-k, \cdots, 0\} \cup \{0, \cdots, k-1\}$ 이며 "$d_0 \cdots d_n$"은 크기가 $d_0 \times k^0 + \cdots + d_n \times k^n$ 인 정수를 뜻한다. 예를 들어, 거울 2진수는 베이스가 $\{-1, 0, 1\}$이 되고, 0이 0을, +가 1을 -가 -1을 표현한다고 하면, + 는 1을, +0+는 5를, +-는 -1을, +-0-는 -9인 정수를 뜻한다.

Problem 2 [5pts] 고정점 귀납법(*fixpoint induction*) 증명이 무엇인가? 그 한계는 무엇인가?

Problem 3 [5pts] Consider, for a set A, a continuous function

$$f \in 2^A \to 2^A.$$

The partial order in 2^A is the subset order. That is, the least upper bound is the set union. Prove that

$$\mathit{lfp}\lambda x.c \cup f(x) = \bigcup_{i \geq 0} f^i(c).$$

Problem 4 [10pts] 정수집합은 그 집합의 최소, 최대의 쌍으로 요약가능하다.

$$2^{\mathbb{Z}} \underset{\alpha}{\overset{\gamma}{\leftrightarrows}} \hat{A} = \{\bot\} \cup \{[a, b] \mid a, b \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty, \infty\}, a \leq b\}$$

1. (5pts) $2^{\mathbb{Z}}$와 $\hat{A}$에서 원소들 사이의 순서($\sqsubseteq$)를 정의하라.

2. (5pts) 갈로아 연결 α와 γ를 정의하고 왜 갈로아 연결인지 보이라.

Problem 5 [20pts] 위의 요약 공간 $\hat{A}$ 에 대해서

1. (10pts) 다음의 $\triangledown$ 연산자를 축지법(widening)으로 사용할 수 있는가? 가부 이유를 축지법의 조건에 맞추어 논하라.

$$\begin{array}{rcl} \bot \triangledown X &=& X \\ X \triangledown \bot &=& X \\ [a,b] \triangledown [a',b'] &=& [(\min(a,a'){<}10\ ?\ -\infty\ :\ \min(a,a')), (\max(b,b'){>}20\ ?\ \infty\ :\ \max(b,b'))] \end{array}$$

2. (10pts) 다음의 $\triangle$ 연산자를 좁히기(narrowing)로 사용할 수 있는가? 가부 이유를 좁히기의 조건에 맞추어 논하라.

$$\begin{array}{rcl} \bot \triangle X &=& X \\ X \triangle \bot &=& X \\ [a,b] \triangle [a',b'] &=& [(\min(a,a'){<}10\ ?\ a'\ :\ a), (\max(b,b'){>}20\ ?\ b'\ :\ b)] \end{array}$$

Problem 6 [10pts] D는 CPO, $f : D \to D$는 연속함수, $\hat{D}$는 D와 갈로아 연결 $D \underset{\alpha}{\overset{\gamma}{\leftrightarrows}} \hat{D}$ 된 요약 공간이다. $\alpha \circ f \sqsubseteq \hat{g} \circ \alpha$ 를 만족하는 $\hat{g} : \hat{D} \to \hat{D}$중에서 제일 작은 것은 $\alpha \circ f \circ \gamma$임을 보여라.

즉, 두가지를 보인다:

1. (5pts) $\alpha \circ f \sqsubseteq (\alpha \circ f \circ \gamma) \circ \alpha$ 이다.

2. (5pts) $\alpha \circ f \sqsubseteq \hat{g} \circ \alpha$인 임의의 $\hat{g}$은 $\alpha \circ f \circ \gamma \sqsubseteq \hat{g}$ 이다.

Problem 7 [40 pts] 다음의 명령형 언어를 생각하자:

$$\begin{array}{rcll} e & ::= & n & \text{integer} \\ & | & x & \text{variable} \\ & | & e\ +\ e & \\ & | & -e & \\ c & ::= & x := e & \text{assignment} \\ & | & c\ ;\ c & \text{sequence} \\ & | & \texttt{repeat}\ c\ \texttt{until}\ x & \text{repetition} \end{array}$$

"`repeat` c `until` x"는 변수 x가 양수가 될 때 까지 c를 반복한다.

분석의 목표는 변수가 가지는 정수가 홀수 인지 짝수인지를 분석하는 것이라고 하자.

프로그램 c의 의미는 $(lfpF)c$로 정의되고

$$\begin{array}{l} F \in (Cmd \to Mem \to Mem) \to (Cmd \to Mem \to Mem) \\ \begin{array}{lcl} Mem &=& Var \xrightarrow{\text{fin}} Val \\ Val &=& 2^{\mathbb{Z}} \end{array} \end{array}$$

요약된 의미는 $(\mathit{lfp}\hat{F})c$로 정의된다

$$
\begin{array}{lcl}
\hat{F} \in (\mathit{Cmd} \to \hat{\mathit{Mem}} \to \hat{\mathit{Mem}}) \to (\mathit{Cmd} \to \hat{\mathit{Mem}} \to \hat{\mathit{Mem}}) \\
\hat{\mathit{Mem}} & = & \mathit{Var} \xrightarrow{\text{fin}} \hat{\mathit{Val}} \\
\hat{\mathit{Val}} & = & \{\bot, \top, \mathtt{e}, \mathtt{o}\} \\
\hat{m}_1 \sqsubseteq \hat{m}_2 & \stackrel{\text{def}}{=} & \forall x \in \mathit{dom}(\hat{m}_1) \cup \mathit{dom}(\hat{m}_2) : \hat{m}_1\, x \sqsubseteq \hat{m}_2\, x \\
\forall x \notin \mathit{dom}(\hat{m}) : \hat{m}\, x & \stackrel{\text{def}}{=} & \bot_{\hat{\mathbb{Z}}}
\end{array}
$$

1. (3pts) 갈로아 연결
$$\mathit{Val} \underset{\alpha}{\overset{\gamma}{\leftrightarrows}} \hat{\mathit{Val}}$$
을 정의하라. (갈로아 연결임을 보일필요는 없슴)

2. (5pts) 갈로안 연결
$$(\mathit{Cmd} \to \mathit{Mem} \to \mathit{Mem}) \underset{\alpha}{\overset{\gamma}{\leftrightarrows}} (\mathit{Cmd} \to \hat{\mathit{Mem}} \to \hat{\mathit{Mem}})$$
을 정의하라. Cmd는 CPO: 순서없는 프로그램들로 구성된 집합이고 $\bot$이 있다고 하자. (갈로아 연결임을 보일필요는 없슴)

3. (7pts) F와 $\hat{F}$를 정의하라.

4. (10pts) $\mathit{lfp}\hat{F}$가 $\mathit{lfp}F$의 안전한 요약임을 보여라.

5. (10pts) 주어진 프로그램 c에 대해서 요약해석 방정식이 도출되는 과정을 설명하고, 다음의 프로그램에 대해서 도출된 방정식을 쓰라:

```
x = -10;
y = x;
repeat
   x = x+1;
   y = y+3
until y
```

6. (5pts) 위에서 도출된 방정식들의 해를 찾아가는 과정을 보이라.