Take-Home Exam 1
SNU 4541.664A Program Analysis
Spring 2007

Prof. Kwangkeun Yi

due: 5/7(Mon) 13:00 in class

Problem 1 "요약해석 증명"

아래와 같은 변수가 있는 정수식 언어를 생각하자.

$$
\begin{array}{rcll}
E & \to & n & (n \in \mathbb{Z}) \\
 & | & x & \text{변수} \\
 & | & E \texttt{ + } E & \\
 & | & \texttt{-}\, E & \\
 & | & \texttt{let}\ x\ E_1\ E_2 & \text{지역 변수} \\
 & | & \texttt{if}\ E_1\ E_2\ E_3 &
\end{array}
$$

의미함수 $\mathcal{V}$는 아래와 같은 공간에서

$$
\begin{array}{rcl}
\mathcal{V} & \in & Exp \to 2^{Env} \to 2^{\mathbb{Z}} \\
\Sigma & \in & 2^{Env} \\
\sigma & \in & Env = Var \xrightarrow{\text{fin}} \mathbb{Z}
\end{array}
$$

조립식으로 정의된다:

$$
\begin{array}{rcl}
\mathcal{V}\, n\, \Sigma & = & \{n\} \\
\mathcal{V}\, x\, \Sigma & = & \{\sigma\, x \mid \sigma \in \Sigma\} \\
\mathcal{V}\, E_1 \texttt{+} E_2\, \Sigma & = & \{z_1 + z_2 \mid z_i \in \mathcal{V}\, E_i\, \Sigma\} \\
\mathcal{V}\, \texttt{-}\, E\, \Sigma & = & \{-z \mid z \in \mathcal{V}\, E\, \Sigma\} \\
\mathcal{V}\, \texttt{let}\, x\, E_1\, E_2\, \Sigma & = & \mathcal{V}\, E_2\, \{\sigma\{x \mapsto v\} \mid \sigma \in \Sigma,\ v \in \mathcal{V}\, E_1\, \Sigma\} \\
\mathcal{V}\, \texttt{if}\, E_1\, E_2\, E_3\, \Sigma & = & \mathcal{V}\, E_2\, (\mathcal{B}\, E_1\, \Sigma) \cup \mathcal{V}\, E_3\, (\neg\mathcal{B}\, E_1\, \Sigma) \\
\mathcal{B}\, E\, \Sigma & = & \cup\{\Sigma' \mid \mathcal{V}\, E\, \Sigma' \not\ni 0, \Sigma' \subseteq \Sigma\} \\
\neg\mathcal{B}\, E\, \Sigma & = & \cup\{\Sigma' \mid \mathcal{V}\, E\, \Sigma' = \{0\}, \Sigma' \subseteq \Sigma\}
\end{array}
$$

의미공간 2^S는 집합 S의 부분집합들의 집합이고 $\subseteq$이 $\sqsubseteq$인 CPO이다.

요약된 의미함수 $\hat{\mathcal{V}}$는 다음의 공간에서

$$\hat{\mathcal{V}} \in Exp \to \hat{Env} \to \hat{\mathbb{Z}}$$

정의되고, 의미공간 사이의 갈로아 연결

$$2^{Env} \to 2^{Z} \underset{\alpha}{\overset{\gamma}{\leftrightarrows}} \hat{Env} \to \hat{\mathbb{Z}}$$

은 각 부품의 갈로아 연결

$$2^{Env} \underset{\alpha_1}{\overset{\gamma_1}{\leftrightarrows}} \hat{Env} \quad \text{와} \quad 2^{\mathbb{Z}} \underset{\alpha_2}{\overset{\gamma_2}{\leftrightarrows}} \hat{\mathbb{Z}}$$

를 가지고 안전하게 정의될 수 있다. 요약 의미함수의 조립식 정의는 다음과 같다:

$$
\begin{array}{rcl}
\hat{\mathcal{V}}\, n\, \hat{\Sigma} & = & \alpha_2\, \{n\} \\
\hat{\mathcal{V}}\, E_1 \texttt{+} E_2\, \hat{\Sigma} & = & \alpha_2\{v_1 + v_2 \mid v_1 \in \gamma_2(\hat{\mathcal{V}}\, E_1\, \hat{\Sigma}), v_2 \in \gamma_2(\hat{\mathcal{V}}\, E_2\, \hat{\Sigma})\} \\
\hat{\mathcal{V}}\, \texttt{-}\, E\, \hat{\Sigma} & = & \alpha_2\{-v \mid v \in \gamma_2(\hat{\mathcal{V}}\, E\, \hat{\Sigma})\} \\
\hat{\mathcal{V}}\, \texttt{let}\, x\, E_1\, E_2\, \hat{\Sigma} & = & \hat{\mathcal{V}}\, E_2\, (\alpha_1\{\sigma\{x \mapsto v\} \mid \sigma \in \gamma_1(\hat{\Sigma}), v \in \gamma_2(\hat{\mathcal{V}}\, E_1\, \hat{\Sigma})\}) \\
\hat{\mathcal{V}}\, \texttt{if}\, E_1\, E_2\, E_3\, \hat{\Sigma} & = & \hat{\mathcal{V}}\, E_2\, (\alpha_2(\mathcal{B}\, E_1\, (\gamma_1\hat{\Sigma}))) \sqcup \hat{\mathcal{V}}\, E_3\, (\alpha_2(\neg\mathcal{B}\, E_1\, (\gamma_1\hat{\Sigma})))
\end{array}
$$

위의 요약함수가 올바른 지를 확인하라. 즉, 모든 정수식 E에 대해서

$$\alpha(\mathcal{V}\, E) \sqsubseteq \hat{\mathcal{V}}\, E$$

인지를 증명하라. □

Problem 2 위의 요약 의미함수를 다음과 같이 정의했을 때도 올바른 지를 증명하라.

$$\begin{array}{rcl}
\hat{\mathcal{V}}\, n\, \hat{\Sigma} & = & \alpha_2\,\{n\} \\
\hat{\mathcal{V}}\, E_1 \,\texttt{+}\, E_2\, \hat{\Sigma} & = & (\hat{\mathcal{V}}\, E_1\, \hat{\Sigma})\hat{+}(\hat{\mathcal{V}}\, E_2\, \hat{\Sigma}) \\
\hat{\mathcal{V}}\,\texttt{-}\, E\, \hat{\Sigma} & = & \hat{-}(\hat{\mathcal{V}}\, E\, \hat{\Sigma}) \\
\hat{\mathcal{V}}\,\texttt{let}\, x\, E_1\, E_2\, \hat{\Sigma} & = & \hat{\mathcal{V}}\, E_2\, (\hat{\Sigma}\{x \hat{\mapsto} \hat{\mathcal{V}}\, E_1\, \hat{\Sigma}\}) \\
\hat{\mathcal{V}}\,\texttt{if}\, E_1\, E_2\, E_3\, \hat{\Sigma} & = & (\hat{\mathcal{V}}\, E_2\, \hat{\Sigma}) \sqcup (\hat{\mathcal{V}}\, E_3\, \hat{\Sigma})
\end{array}$$

여기서

$$\begin{array}{rcl}
\hat{+} & \in & \hat{\mathbb{Z}} \times \hat{\mathbb{Z}} \to \hat{\mathbb{Z}} \\
\hat{-} & \in & \hat{\mathbb{Z}} \to \hat{\mathbb{Z}} \\
\cdot\{x \hat{\mapsto} \cdot\} & \in & \hat{Env} \times \hat{\mathbb{Z}} \to \hat{Env} \quad (\text{환경 변경})
\end{array}$$

은 실제 $+$, $-$, $\cdot\{x \mapsto \cdot\}$을 안전하게 요약한 함수들이다.

Problem 3 다음의 질문에 예/아니오로 답하고, 그 이유를 서술하라.

- A, B는 집합이다. 그러면 다음 두 CPO사이에 갈로아 연결이 가능하다:

$$2^{A \xrightarrow{\text{fin}} B} \to 2^B \underset{\alpha?}{\overset{\gamma?}{\leftrightarrows}} (A \xrightarrow{\text{fin}} 2^B) \to 2^B$$

- A, B는 집합이고 2^B와 $\hat{B}$사이는 갈로아 연결되어 있다. 그러면 다음 두 CPO사이에 갈로아 연결이 가능하다:

$$2^{A \xrightarrow{\text{fin}} 2^B} \to 2^B \underset{\alpha?}{\overset{\gamma?}{\leftrightarrows}} (A \xrightarrow{\text{fin}} \hat{B}) \to \hat{B}$$

- A는 집합이고 A^ω는 길이가 무한 할 수도 있는 A원소들의 리스트들의 집합이다. 2^A와 $\hat{A}$사이는 갈로아 연결되어 있다. 그러면 다음 두 CPO사이에 갈로아 연결이 가능하다:

$$2^{A^\omega} \underset{\alpha?}{\overset{\gamma?}{\leftrightarrows}} \hat{A}$$

- A는 집합이고 A^ω는 길이가 무한 할 수도 있는 A원소들의 리스트들의 집합이다. 2^A와 $\hat{A}$사이는 갈로아 연결되어 있다. A의 각 원소를 유한한 인덱스 집합 I의 한 원소로 맺어주는 함수가 존재한다. 이때 다음 두 CPO사이에 갈로아 연결이 가능하다:

$$2^{A^\omega} \underset{\alpha?}{\overset{\gamma?}{\leftrightarrows}} I \to \hat{A}$$

- 다음의 정수식 프로그래밍 언어를 타겟으로 하는 분석기를 정의하려고 한다.

$$\begin{array}{rcll} e & ::= & n & (n \in \mathbb{Z}) \\ & | & e\,\texttt{+-} & \\ & | & e \,\texttt{mod}\, e & \end{array}$$

$e\,\texttt{mod}\,0$ 는 e의 값과 상관없이 임의의 양수가되고, $n\texttt{+-}$는 $n+1$과 $n-1$중에서 임의로 선택된다.

요약공간을 만드는 갈로아 연결

$$2^{\mathbb{Z}} \xrightleftharpoons[\alpha]{\gamma} \{\bot, 0, >0, <0, \top\}$$

을

$$\begin{array}{rcll} \alpha\emptyset & = & \bot & \\ \alpha\{0\} & = & 0 & \\ \alpha X & = & >0 & \text{if } \forall x \in X : x > 0 \\ \alpha X & = & <0 & \text{if } \forall x \in X : x < 0 \\ \alpha X & = & \top & \text{otherwise} \end{array}$$

로 하고 안전한 $\hat{\texttt{+-}}$을 가장 정확하게 정의해서

$$\begin{array}{rcl} \bot\,\hat{\texttt{+-}} & = & \bot \\ v\,\hat{\texttt{+-}} & = & \top \end{array}$$

로 했다. 옳은가?

- 또, 위의 요약공간에서 안전한 $\hat{\texttt{mod}}$를 가장 정확하게 정의하면 아래와 같다:

$$\begin{array}{lrcl} & \bot\,\hat{\texttt{mod}}\,\star & = & \bot \\ \text{else} & \star\,\hat{\texttt{mod}}\,\bot & = & \bot \\ \text{else} & \star\,\hat{\texttt{mod}}\,0 & = & >0 \\ \text{else} & 0\,\hat{\texttt{mod}}\,\star & = & 0 \\ \text{else} & \star\,\hat{\texttt{mod}}\,\star & = & \top \end{array}$$

옳은가?