SNU 4541.664A Program Analysis: Exam 1

19:00 - 22:00, May 4, 2009

Problem 1 (10점) 빈칸을 메꾸라.

We define the semantics $[\![\mathcal{C}]\!]$ of program $\mathcal{C}$ be the set of all states (memory and control state) reachable from the set I of initial states.

Let $\tau_{\mathcal{C}}$ be the function that maps from a state to a state after one-step transition. The natural extension $T_{\mathcal{C}}(X)$ of $\tau_{\mathcal{C}}$ for a set X of states is

$$T_{\mathcal{C}}(X) = \{s' \mid \tau_{\mathcal{C}}(s) = s', s \in X\}.$$

Then

$$[\![C]\!] = \mathit{fix} F_{\mathcal{C}}$$

where

$$F_{\mathcal{C}}(X) = \boxed{} \cup \boxed{}.$$

Problem 2 (10점) 빈칸을 메꾸라.

귀납 규칙 집합 Φ는 함수 ϕ를 정의:

$$\phi(Y) = \{x \mid \frac{X}{x} \in \Phi, \boxed{}\}$$

Φ 규칙들이 정의하는 집합은 함수 ϕ에 의해서 닫혀있는 집합중에서

$$\bigcap\{X \mid \boxed{}\} \stackrel{\text{let}}{=} Y$$

이다. 이 집합 Y는 ϕ의 최소고정점(least fixed point)이다.

Problem 3 (15점) 위의 집합 Y가 ϕ의 최소고정점임은 다음과 같이 증명된다. 빈칸을 메꾸라.

- $\phi(Y) \subseteq Y$인가? 그렇다. Y에서 ϕ를 통해 만들어지는 원소는 Y를 벗어날 수 없다. 벗어난다면, $\boxed{\quad\cdots\quad}$ 이므로 모순이다.

- $Y \subseteq \phi(Y)$인가? 그렇다. $\phi(Y)$가 Y보다 작은 집합이라고 하자. 위의 $\phi(Y) \subseteq Y$로 부터 ϕ는 단조함수 이므로, $\phi(\phi(Y)) \subseteq \phi(Y)$이다. 즉, $\phi(Y)$가 ϕ에 의해서 닫혀 있으므로 위의 "X"집합의 하나가 된다. 즉, $\boxed{\quad\cdots\quad}$ 이므로 모순이다.

- 마지막으로 Y가 ϕ의 고정점 중에서 가장 작은가? 그렇다. 다른 Y'가 ϕ의 고정점이라고 하면, 즉, $\phi(Y') = Y'$이면, $\boxed{\quad\cdots\quad}$이므로 Y는 Y'보다 작다.

Problem 4 (5점) 두 CPO A 와 $\hat{A}$가 갈로아 연결

$$A \underset{\alpha}{\overset{\gamma}{\leftrightarrows}} \hat{A}$$

되어 있다는 것의 정의는?

Problem 5 (10점) $2^A \underset{\alpha_1}{\overset{\gamma_1}{\leftrightarrows}} \hat{X}$ 이고 $2^B \underset{\alpha_2}{\overset{\gamma_2}{\leftrightarrows}} \hat{Y}$이면,

- $2^{A\times B}$를 $\hat{X} \times \hat{Y}$로 다음과 같이

  $$\alpha = \lambda S.\langle \alpha_1\{a \mid \langle a, -\rangle \in S\}, \alpha_2\{b \mid \langle -, b\rangle \in S\}\rangle$$

  요약가능하다. 갈로아 짝 γ를 정의하고, 갈로아 연결임을 보이라.

- 2^{A+B}를 $\hat{X} \times \hat{Y}$로 다음과 같이

  $$\alpha = \lambda X.\langle \alpha_1\{a|a \in X, a \in A\}, \alpha_2\{b|b \in X, b \in B\}\rangle$$

  요약가능하다. 갈로아 짝 γ를 정의하고, 갈로아 연결임을 보이라.

Problem 6 (15점) 빈칸을 메꾸라.

두 CPO A 와 $\hat{A}$가 갈로아 연결

$$A \underset{\alpha}{\overset{\gamma}{\leftrightarrows}} \hat{A}$$

되어 있고, A와 $\hat{A}$모두 각각 $\sqcup$에 대해서 닫혀 있으면($\sqcup$-semi-lattice) $\alpha(x \sqcup_A y) = \alpha(x) \sqcup_{\hat{A}} \alpha(y)$이다.

그 이유는 아래와 같다.

- $\alpha(x) \sqcup \alpha(y) \sqsubseteq \alpha(x \sqcup y)$이다. 왜냐하면 $\boxed{\quad\quad\cdots\quad\quad}$이기 때문이다.
- $x \sqcup y \sqsubseteq \gamma(\alpha(x) \sqcup \alpha(y))$이다. 왜냐하면 $x \sqsubseteq \boxed{\quad\quad\quad}$으로부터 $x \sqsubseteq \gamma(\alpha(x) \sqcup \alpha(y))$ 이고 $y \sqsubseteq \boxed{\quad\quad\quad}$으로부터 $y \sqsubseteq \gamma(\alpha(x) \sqcup \alpha(y))$ 이기 때문이다.

  따라서, 갈로아 연결로, $\alpha(x \sqcup y) \sqsubseteq \alpha(x) \sqcup \alpha(y)$이다.

Problem 7 (20점) Fixpoint Transfer Theorem의 한 버전이다. 증명의 빈칸을 메꾸라.

> D와 $\hat{D}$는 각각 CPO이고 갈로아 연결이 되어있다. 함수 $F : D \to D$는 연속함수이고 $\hat{F} : \hat{D} \to \hat{D}$는 단조함수이다. $\alpha \circ F \sqsubseteq \hat{F} \circ \alpha$ 이다. 그러면,
> $$\alpha(lfpF) \sqsubseteq \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} \hat{F}^i(\hat{\bot}).$$

Proof. $\alpha \circ F \sqsubseteq \hat{F} \circ \alpha$로 부터

$$\forall n \in \mathbb{N} : \alpha \circ F^n \sqsubseteq \hat{F}^n \circ \alpha$$

이다. 왜냐하면,

$$\begin{array}{rcl}
\alpha \circ F^{n+1} & = & \alpha \circ F \circ F^n \\
 & \sqsubseteq & \alpha \circ F \circ \gamma \circ \alpha \circ F^n \\
 & & (\text{이유: } \boxed{\quad\quad\cdots\quad\quad}) \\
 & \sqsubseteq & \alpha \circ F \circ \gamma \circ \hat{F}^n \circ \alpha \\
 & & (\text{이유: } \boxed{\quad\quad\cdots\quad\quad}) \\
 & \sqsubseteq & \hat{F} \circ \hat{F}^n \circ \alpha. \\
 & & (\text{이유: } \boxed{\quad\quad\cdots\quad\quad})
\end{array}$$

따라서

$$\forall n \in \mathbb{N} : (\alpha \circ F^n)\bot \sqsubseteq (\hat{F}^n \circ \alpha)\bot$$

즉

$$\forall n \in \mathbb{N} : \alpha(F^n \bot) \sqsubseteq \hat{F}^n \hat{\bot}.$$

더불어 $\{\alpha(F^i \bot)\}_i$와 $\{\hat{F}^i \hat{\bot}\}_i$는 체인이므로 (이유: $\boxed{\quad\quad\cdots\quad\quad}$) $\sqcup_i \alpha(F^i \bot)$와 $\sqcup_i (\hat{F}^i \hat{\bot})$이 존재하며

$$\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} \alpha(F^i \bot) \sqsubseteq \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} (\hat{F}^i \hat{\bot})$$

이다. α가 연속함수이므로 왼편식을 다시 쓰면,

$$\begin{array}{rcll} \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} \alpha(F^i\bot) & = & \alpha(\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}}(F^i\bot)) & (\alpha\text{는 연속함수}) \\ & = & \alpha(lfpF). & (\text{연속함수의 최소고정점}) \end{array}$$

즉,

$$\alpha(lfpF) \sqsubseteq \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} (\hat{F}^i\hat{\bot}).$$

Problem 8 (15점) 다음의 명령형 언어를 생각하자.

$$\begin{array}{rcl} C & \to & \texttt{skip} \mid x \texttt{ := } E \mid C \texttt{ ; } C \\ & \mid & \texttt{if } B\ C\ C \\ & \mid & \texttt{while } B\ C \\ E & \to & n \quad (n \in \mathbb{Z}) \mid x \\ & \mid & E \texttt{ + } E \ \mid\ B \quad (\text{boolean expr}) \\ B & \to & x < E \ \mid\ \neg B \end{array}$$

프로그램 부품 X의 모듬 의미(collecting semantics) $\underline{X}$는 아래와 같은 공간에서 정의된다.

$$\begin{array}{rcl} \underline{C} & \in & 2^{Memory} \to 2^{Memory} \\ \underline{E} & \in & 2^{Memory} \to 2^{\mathbb{Z}} \\ \underline{B} & \in & 2^{Memory} \to 2^{Memory} \\ Memory & = & Loc \xrightarrow{\text{fin}} \mathbb{Z} \end{array}$$

정의하라. 의미공간 2^S는 집합 S의 부분집합들의 집합이고 $\subseteq$이 $\sqsubseteq$인 CPO이다.

Problem 9 (30점) 위의 언어에서, 요약의미를 결정하는 함수는 다음과 같은 공간에서 정의된다:

$$\begin{array}{rcl} \underline{\hat{C}} & \in & \hat{Memory} \to \hat{Memory} \\ \underline{\hat{E}} & \in & \hat{Memory} \to \hat{\mathbb{Z}} \\ \underline{\hat{B}} & \in & \hat{Memory} \to \hat{Memory} \end{array}$$

요약의미공간의 부품들은 갈로아 연결

$$2^{Memory} \underset{\alpha_1}{\overset{\gamma_1}{\leftrightarrows}} \hat{Memory} \qquad 2^{\mathbb{Z}} \underset{\alpha_2}{\overset{\gamma_2}{\leftrightarrows}} \hat{\mathbb{Z}}$$

되어 있다.

요약된 연산자들

$$
\begin{array}{rcl}
\hat{+} & \in & \hat{\mathbb{Z}} \times \hat{\mathbb{Z}} \rightarrow \hat{\mathbb{Z}} \\
\hat{-} & \in & \hat{\mathbb{Z}} \rightarrow \hat{\mathbb{Z}} \\
\cdot\{x \hat{\mapsto} \cdot\} & \in & \hat{Memory} \times \hat{\mathbb{Z}} \rightarrow \hat{Memory} \quad (\text{메모리 변경})
\end{array}
$$

은 실제 $+$, $-$, $\cdot\{x \mapsto \cdot\}$을 안전하게 요약한 함수들이다. 이 연산자들을 이용해서 안전한 요약 의미함수를 정의하고 그 안전함을 증명하라. 안전성 증명은 `if`와 `while`문의 경우만 하라.

Problem 10 (10점) 정수집합은 그 집합의 최소, 최대의 쌍으로 요약가능하다.

$$2^{\mathbb{Z}} \underset{\alpha}{\overset{\gamma}{\leftrightarrows}} \hat{\mathbb{Z}} = \{\bot\} \cup \{[a,b] \mid a,b \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty, \infty\}, a \leq b\}$$

위와 같은 요약공간 $\hat{\mathbb{Z}}$을 "interval domain"이라고 한다.

1. $2^{\mathbb{Z}}$와 $\hat{\mathbb{Z}}$에서 원소들 사이의 순서($\sqsubseteq$)를 정의하라.

2. 갈로아 연결 α와 γ를 정의하고 왜 갈로아 연결인지 보이라.

Problem 11 (10점) "interval domain" $\hat{\mathbb{Z}}$ 에 대해서 다음의 $\bigtriangledown$와 $\bigtriangleup$ 를 넓히기(widening)와 좁히기(narrowing) 연산자로 사용할 수 있는지를 넓히기와 좁히기의 조건에 맞추어 논하라.

- ($\bigtriangledown$)

$$
\begin{array}{rcl}
\bot \bigtriangledown X & = & X \\
X \bigtriangledown \bot & = & X \\
[l,u] \bigtriangledown [l',u'] & = & [(\max(l,l')<10 \ ? \ -\infty : \ \min(l,l')), (\max(u,u')>10 \ ? \ \infty : \ \max(u,u'))]
\end{array}
$$

- ($\bigtriangleup$)

$$
\begin{array}{rcl}
\bot \bigtriangleup X & = & X \\
X \bigtriangleup \bot & = & X \\
[l,u] \bigtriangleup [l',u'] & = & [\min(l,l') - 1, \max(u,u') + 1]
\end{array}
$$

Problem 12 (20점) 위의 요약의미 정의에서 정수공간 $\hat{\mathbb{Z}}$이 "interval domain"이라고 하자. 임의의 프로그램 C의 요약의미 $\hat{C}$가 유한시간내에 안전하게 계산하기 위해서 필요한 정의를 추가하라.