Homework 2
SNU 4541.664A
Due: 4/25(Tue), 15:30

Kwangkeun Yi

Exercise 1 다음을 증명하라.

$\gamma : \hat{D} \to D$가 연속(*continuous*) 함수이고 $\hat{D}$가 임의의 부분 집합의 최대 밑뚜껑(*greatest lower bound*)이 있으면($\sqcap$-*complete*), 갈로아 짝 α는

$$\alpha\, x = \sqcap\{\hat{x} \mid x \sqsubseteq \gamma\, \hat{x}\}$$

이다.

Exercise 2 다음의 조립식 요약함수들이 갈로아연결을 만든다는 것을 증명하라.

A와 $\hat{A}$이 갈로아 연결되있고(A를 요약한 것이 $\hat{A}$이고), B와 $\hat{B}$이 갈로아 연결되있다.

- $A \times B$를 $\hat{A} \times \hat{B}$로 요약하는 함수

$$\alpha_{A\times B} = \lambda\langle a, b\rangle.\langle \alpha_A a, \alpha_B b\rangle$$

- $A + B$를 $\hat{A} + \hat{B}$로 요약하는 함수

$$\alpha_{A+B} = \lambda x.\alpha_A x \text{ } \mathit{if} \text{ } x \in A, \ \alpha_B x \text{ } o.w.$$

- $A \to B$를 $\hat{A} \to \hat{B}$로 요약하는 함수

$$\alpha_{A\to B} = \lambda f.\alpha_B \circ f \circ \gamma_{\hat{A}}$$

Exercise 3 $2^A \underset{\alpha_1}{\overset{\gamma_1}{\leftrightarrows}} \hat{X}$ 이고 $2^B \underset{\alpha_2}{\overset{\gamma_2}{\leftrightarrows}} \hat{Y}$ 이면, 아래 요약함수들이 갈로아 연결을 만드는 지를 증명하라.

- $2^{A\times B} \leftrightarrows \hat{X} \times \hat{Y}$ 가능

$$\alpha = \lambda X.\langle \alpha_1\{a|\langle a,b\rangle \in X\}, \alpha_2\{b|\langle a,b\rangle \in X\}\rangle$$

- $2^{A\times B} \leftrightarrows A' \to \hat{Y}$ 가능 $(A' \subseteq A)$

$$\alpha = \lambda X.\{a \mapsto \alpha_2 S|\langle a,b\rangle \in X, S = \{b|\langle a,b\rangle \in X\}\}$$

- $2^{A+B} \leftrightarrows \hat{X} \times \hat{Y}$ 가능

$$\alpha = \lambda X.\langle \alpha_1\{a|a \in X, a \in A\}, \alpha_2\{b|b \in X, b \in B\}\rangle$$

- $2^A \to 2^B \leftrightarrows \hat{X} \to \hat{Y}$ 가능

$$\alpha = \lambda f.\alpha_2 \circ f \circ \gamma_1$$

Exercise 4 축지법의 조건을 아래와 같이 강화시켰다(밑줄).

$$\forall a, b \in \hat{D} : (a \sqsubseteq a \triangledown b) \ \wedge \ (b \sqsubseteq a \triangledown b) \tag{1}$$

이고

$$\forall \underline{\text{부분집합}}\{x_i\}_i : \text{체인 } y_0 = x_0, y_{i+1} = y_i \triangledown x_{i+1} \text{ 는 유한} \tag{2}$$

축지해서 정의되는 체인:

$$\begin{aligned} \hat{X}_0 &= \hat{\bot} \\ \hat{X}_{i+1} &= \hat{X}_i \qquad\qquad \hat{F}(\hat{X}_i) \sqsubseteq \hat{X}_i \text{ 이면} \\ &= \hat{X}_i \triangledown \hat{F}(\hat{X}_i) \quad \text{아니면,} \end{aligned} \tag{3}$$

그러면 아래 정리에서 $\hat{F}$함수가 단조함수일 필요가 없어진다.

Theorem 1 (widen's safety) *$\hat{D}$는 CPO 이고, $\hat{F} : \hat{D} \to \hat{D}$는 ~~단조(monotonic)~~ 함수이고, $\triangledown : \hat{D} \times \hat{D} \to \hat{D}$는 조건 (1) 과 (2)을 만족하면, (3)로 정의되는 체인 $\{\hat{X}_i\}_i$ 은 유한하고 그 끝은 $\gamma(\lim_{i\in\mathbb{N}} \hat{X}_i) \sqsupseteq \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} F^i(\bot)$이다.*

위의 정리를 증명하라.

□