Homework 1

SNU 4541.664A

기한: 3/30 수업시간

Kwangkeun Yi

- 이번 숙제의 목적: 귀납증명, CPO, 고정점등의 개념 확인 + 수업시간에 다룬 간단한 언어의 의미구조를 조립식 스타일로 정의하고, 그 정의대로 의미를 풀어보기.

Exercise 1 집합 $T \ni t$는 귀납적으로 다음과 같이 정의된다:

$$t \to \cdot \mid /t,t/ \mid /t,t,t/$$

모든 $t \in T$는 ,와 /의 갯수에 대한 어떤 성질을 만족한다. 그 성질을 찾고 증명하라. □

Exercise 2 식들의 집합이 귀납적으로 다음과 같이 정의된다:

$$e \to x \mid e + e \mid e * e \mid e ?\, e\, e$$

"+"와 "*"는 각각 정수 더하기와 곱하기를 뜻하고 "$e_1 ?\, e_2\, e_3$"은 e_1의 값이 0이면 e_3의 값을, 아니면 e_2의 값을 계산한다.

다음을 증명하라: 모든 식에 대해서, 그 식에 나타나는 변수들의 값이 n의 배수이면 그 식의 값은 n의 배수이다. □

Exercise 3 CPO A에서 CPO B로 가는 연속함수로 구성된 $A \to B$가 CPO임을 증명하라. □

Exercise 4 다음 함수들의 고정점(fixpoint)을 찾아라:

- $\lambda x.1 \quad \in \quad \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
- $\lambda x.x \quad \in \quad \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

- $\lambda x.x+1 \quad \in \quad \mathbb{N}\cup\{\infty\} \to \mathbb{N}\cup\{\infty\}$
- $\lambda f(\lambda x.\text{if } x=0?\, 0:\; x+f(x-1)) \quad \in \quad (\mathbb{N}\to\mathbb{N})\to(\mathbb{N}\to\mathbb{N})$
- $\lambda X.\{\epsilon\}\cup\{\star x \mid x\in X\} \quad \in \quad 2^S \to 2^S$ (S 는 $\star$로 만드는 유한한 스트링들의 집합)

Exercise 5 집합 S에 대해서 그 부분집합들의 집합 2^S의 원소들 사이의 부분순서(partial order) $\sqsubseteq$를 부분집합 순서 $\subseteq$로 하면, 최소윗뚜껑(least upper bound)은 합집합과 같고 가장 작은 원소는 $\emptyset$인 CPO로 볼 수 있다.

어떤 연속 함수

$$f \in 2^S \to 2^S$$

를 생각하자. 이 함수는 다음 두 성질을 만족한다고 가정하자: $f(\emptyset)=\emptyset$ 그리고 $\forall x,y\in 2^A : f(x\cup y) = f(x)\cup f(y)$.

다음을 증명하라: $A\in 2^S$라고 하고, 최소 고정점

$$\mathit{fix}(\lambda x.A\cup f(x)) = f^0(A)\cup f^1(A)\cup f^2(A)\cup\cdots = \bigcup_{i\geq 0} f^i(A).$$

Exercise 6 다음 연속함수들의 최소 고정점(least fixpoint)을 계산하라:

- $\lambda x.1 \quad \in \quad \mathbb{N}_\perp \to \mathbb{N}_\perp$
- $\lambda x.x \quad \in \quad \mathbb{N}_\perp \to \mathbb{N}_\perp$
- $\lambda f(\lambda x.\text{if } x=0?\, 0:\; x+f(x-1)) \quad \in \quad (\mathbb{N}_\perp\to\mathbb{N}_\perp)\to(\mathbb{N}_\perp\to\mathbb{N}_\perp)$

  $+$함수와 $-$함수는 엄격(strict)하다. 즉, 인자가 하나라도 $\perp$이면 $\perp$을 낸다.
- $\lambda X.\{\epsilon\}\cup\{\star x \mid x\in \quad X\} \quad \in \quad 2^S\to 2^S$

  S 는 $\star$로 만드는 유한한 스트링들의 집합이다.

Exercise 7 수업시간에 다룬(교과서 2장) “그림” 언어를 생각하자.

`p`	$::=$	`init`$(\mathcal{R})$	initialization, with a point in $\mathcal{R}$
	$\mid$	`translation`(u,v)	translation by vector (u,v)
	$\mid$	`rotation`(u,v,θ)	rotation defined by center (u,v) and angle θ
	$\mid$	`p ; p`	sequence of operations
	$\mid$	`{p}or{p}`	choice (the branch taken is non-deterministic)
	$\mid$	`iter{p}`	iteration (the number of iterations is non-deterministic)

위 그림 언어의 의미를 수학적으로 정의하자. 다음과 같이 정의하도록 한다:

- 프로그램의 의미로 우리가 잡아내려고 하는 것은 프로그램이 점들의 집합을 어떻게 움직여 가느냐다. 실제 프로그램 실행은 하나의 점을 움직여가지만, 우리의 관심은 모든 가능한 점들의 집합들에 대한 정보다. 즉, 프로그램이 점들의 집합을 받으면 각 점들을 움직여서 어떤 점들의 집합을 만들지, 이다.

- 따라서, 그림 프로그램 `p`의 의미 $[\![\texttt{p}]\!]$는 xy-평면 점들의 집합을 받아서 xy-평면 점들의 집합을 내놓는 함수로 정의하게 된다.

- 그런 함수는 CPO위에서의 연속함수가 될 것이다. xy-평면 점들의 집합을 G라고 하면,

$$[\![\texttt{p}]\!] \in 2^G \to 2^G.$$

- 임의의 프로그램 `p`의 의미 $[\![\texttt{p}]\!]$는 프로그램을 만드는 위의 6가지 경우마다 조립식으로 정의하면 결정된다. 다음과 같이 첫 세 가지 경우를 정의하였다:

$$\begin{array}{rcl} [\![\texttt{init}(\mathcal{R})]\!]A & = & \mathcal{R} \\ [\![\texttt{translation}(u,v)]\!]A & = & \{\mathit{trans}(p,(u,v)) \mid p \in A\} \\ [\![\texttt{rotation}(u,v,\theta)]\!]A & = & \{\mathit{rotate}(p,(u,v,\theta)) \mid p \in A\} \end{array}$$

  위에서 *trans*와 *rotate*는 정의되있다고 가정하자. 나머지 경우를 정의하라.

- 다음 프로그램 `p`의 의미 $[\![\texttt{p}]\!]A$를 위의 정의에 따라 써보라:

```
init({(0,0),(0,1)});
iter{
    {
        translation(1,0);
    }or{
        translation(1,1);
    }
}
```

□