퀴즈 1

SNU 4541.664A

10/07(수) 수업시간

이름: 학번:

Exercise 1 식들의 집합이 귀납적으로 다음과 같이 정의된다:

$$e \to x \mid e + e \mid e ?\, e\, e$$

"+"와 "*"는 각각 정수 더하기와 곱하기를 뜻하고 "$e_1 ?\, e_2\, e_3$"은 e_1의 값이 0이면 e_3의 값을, 아니면 e_2의 값을 계산한다.

다음을 증명하라: 모든 식에 대해서, 그 식에 나타나는 변수들의 값이 n의 배수이면 그 식의 값은 n의 배수이다.

Exercise 2 집합 S에 대해서 그 부분집합들의 집합 2^S의 원소들 사이의 부분순서(partial order) $\sqsubseteq$를 부분집합 순서 $\subseteq$로 하면, 최소윗뚜껑(least upper bound)은 합집합과 같고 가장 작은 원소는 $\emptyset$인 CPO로 볼 수 있다.

어떤 연속 함수

$$f \in 2^S \to 2^S$$

를 생각하자. 이 함수는 다음 두 성질을 만족한다고 가정하자: $f(\emptyset) = \emptyset$ 그리고 $\forall x, y \in 2^A : f(x \cup y) = f(x) \cup f(y)$.

다음을 증명하라: $A \in 2^S$라고 하고, 최소 고정점

$$\mathit{fix}(\lambda x.A \cup f(x)) = \bigcup_{i \geq 0} f^i(A).$$

Exercise 3 다음 연속함수들의 최소 고정점(least fixpoint)을 찾아라:

- $\lambda x.1 \quad \in \quad \mathbb{N}_\perp \to \mathbb{N}_\perp$
- $\lambda x.x \quad \in \quad \mathbb{N}_\perp \to \mathbb{N}_\perp$
- $\lambda f(\lambda x.\text{if } x = 0? \; 0 : \; x + f(x-1)) \quad \in \quad (\mathbb{N}_\perp \to \mathbb{N}_\perp) \to (\mathbb{N}_\perp \to \mathbb{N}_\perp)$

  $+$함수와 $-$함수는 엄격(strict)하다. 즉, 인자가 하나라도 $\perp$이면 $\perp$을 낸다.

Exercise 4 프로그램의 의미구조를 정의에 따라 써보는 연습을 하자. 다음과 같은 단순 언어를 생각하자.

$$\begin{array}{rcl} C & ::= & \texttt{skip} \mid \texttt{store}\ E \mid C\ ;\ C \mid C\ \texttt{or}\ C \\ E & ::= & n \mid \texttt{load} \mid E\ \texttt{+}\ E \mid \texttt{-}\ E \end{array}$$

변수가 하나만 있는 명령형 언어라고 보면된다.

프로그램 C의 의미구조(collecting semantics) $[\![C]\!]$ 는 다음과 같다. 복수의 기계상태(현재 변수값)를 받아 새로운 기계상태(새로운 변수값)들을 내놓는다.

$$\begin{array}{rcl} Val & = & \mathbb{Z} \\ [\![C]\!] & \in & 2^{Val} \to 2^{Val} \\ [\![E]\!] & \in & 2^{Val} \to 2^{Val} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} [\![\texttt{skip}]\!]S & = & S \\ [\![\texttt{store}\ E]\!]S & = & [\![E]\!]S \\ [\![C_1\ ;\ C_2]\!]S & = & [\![C_2]\!]([\![C_1]\!]S) \\ [\![C_1\ \texttt{or}\ C_2]\!]S & = & [\![C_1]\!]S\ \cup\ [\![C_2]\!]S \\ [\![n]\!]S & = & \{n\} \\ [\![\texttt{load}]\!]S & = & S \\ [\![E_1\ \texttt{+}\ E_2]\!]S & = & ([\![E_1]\!]S)\dot{+}([\![E_2]\!]S) \\ [\![\texttt{-}\ E]\!]S & = & \dot{-}([\![E]\!]S) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} S_1\dot{+}S_2 & = & \{s_1 + s_2 \mid s_1 \in S_1, s_2 \in S_2\} \\ \dot{-}S & = & \{-s \mid s \in S\} \end{array}$$

프로그램 C의 또 다른 의미구조 $[\![C]\!]^\#$는 다음과 같이 정의된다.

$$
\begin{array}{rcl}
\mathit{Val}^\# & = & \{\bot, 0, 1, \top\} \\
\text{위 원소들의 의미는} & & \\
\gamma(\bot) & = & \emptyset \\
\gamma(\top) & = & \mathbb{Z} \\
\gamma(1) & = & \text{모든 홀수정수들의 집합} \\
\gamma(0) & = & \text{모든 짝수정수들의 집합}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
[\![E]\!]^\# & \in & \mathit{Val}^\# \to \mathit{Val}^\# \\
[\![n]\!]^\# s^\# & = & n \mod 2 \\
[\![\texttt{load}]\!]^\# s^\# & = & s^\# \\
[\![E_1 \texttt{ + } E_2]\!]^\# s^\# & = & ([\![E_1]\!]^\# s^\#) +^\# ([\![E_2]\!]^\# s^\#) \\
[\![\texttt{- } E]\!]^\# s^\# & = & [\![E]\!]^\# s^\#
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
\text{이래저래 } +^\# \text{ 는} & & \\
\bot +^\# x & = & \bot \\
0 +^\# 0 & = & 0 \\
0 +^\# 1 & = & 1 \\
1 +^\# 1 & = & 0 \\
\top +^\# 0 & = & \top \\
\top +^\# 1 & = & \top \\
\top +^\# \top & = & \top
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
[\![C]\!]^\# & \in & \mathit{Val}^\# \to \mathit{Val}^\# \\
[\![\texttt{skip}]\!]^\# s^\# & = & s^\# \\
[\![\texttt{store } E]\!]^\# s^\# & = & [\![E]\!]^\# s^\# \\
[\![C_1 \texttt{ ; } C_2]\!]^\# s^\# & = & [\![C_2]\!]^\# ([\![C_1]\!]^\# s^\#) \\
[\![C_1 \texttt{ or } C_2]\!]^\# s^\# & = & ([\![C_1]\!]^\# s^\#) \cup^\# ([\![C_2]\!]^\# s^\#)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
\text{이래저래 } \cup^\# \text{ 는} & & \\
\bot \cup^\# x & = & x \\
\top \cup^\# x & = & \top \\
0 \cup^\# 1 & = & \top \\
0 \cup^\# 0 & = & 0 \\
1 \cup^\# 1 & = & 1
\end{array}
$$

다음 프로그램의 의미를 위의 두 가지 의미구조 정의에 따라 쓰고 정리하라:

$$\texttt{store}\ 3\ ;\ ((\texttt{-}\ \texttt{load})\ \texttt{or}\ (\texttt{store}\ (5\ \texttt{+}\ \texttt{load})))$$