퀴즈 2

SNU 4541.664A

10/14(수) 수업시간

이름: 학번:

Exercise 1 요약해석 정리(fixpoint transfer theorem)의 증명을 완성하라.

Theorem. D와 $D^{\#}$는 각각 CPO이고 갈로아 연결이 되어있다. 함수 $F : D \to D$는 연속함수이고 $F^{\#} : D^{\#} \to D^{\#}$는 단조함수이거나 팽창함수이다. $F \circ \gamma \sqsubseteq \gamma \circ F^{\#}$이다. 그러면,

$$\mathit{fix} F \sqsubseteq \gamma\Big(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} {F^{\#}}^{i}(\bot^{\#})\Big).$$

Proof. $F \circ \gamma \sqsubseteq \gamma \circ F^{\#}$로 부터

$$\forall n \in \mathbb{N} : F^{n}(\bot) \sqsubseteq \gamma({F^{\#}}^{n}(\bot^{\#}))$$

이다. 귀납법으로 증명된다. 즉 $n = 0$일때 왼편은 $\bot$이고 오른편은 $\gamma(\bot)$ 이므로 성립한다. 귀납경우를 따지면

$$\begin{array}{rcll} F^{n+1}(\bot) & = & F(F^{n}(\bot)) & \\ & \sqsubseteq & F(\gamma({F^{\#}}^{n}(\bot^{\#}))) & (\boxed{\qquad\qquad}\text{과 }\boxed{\qquad\qquad}) \\ & \sqsubseteq & \gamma(F^{\#}({F^{\#}}^{n}(\bot^{\#}))) & (\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}) \\ & = & \gamma({F^{\#}}^{n+1}(\bot^{\#})). & \end{array}$$

이로부터, 최종 증명목표인

$$\mathit{fix} F \sqsubseteq \gamma\Big(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} {F^{\#}}^{i}(\bot^{\#})\Big)$$

를 증명할 수 있다. F는 연속함수여서 단조함수이므로 $\{F^{i}\bot\}_{i}$는 체인이고 $\sqcup_{i}(F^{i}\bot)$가 존재한다. $F^{\#}$는 단조함수이거나 팽창함수이므로 $\{{F^{\#}}^{i}\bot^{\#}\}_{i}$는 $\boxed{\qquad\qquad}$

γ는 [ ]이므로 $\{\gamma(F^{\#^i}\bot^\#)\}_i$도 체인이어서 $\sqcup_i(\gamma(F^{\#^i}\bot^\#))$도 존재한다. 따라서,

$$\forall n \in \mathbb{N} : F^n(\bot) \sqsubseteq \gamma(F^{\#^n}(\bot^\#))$$

로 부터 다음이 성립한다:

$$\begin{array}{lll} \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} F^i(\bot) & \sqsubseteq & [\qquad\qquad\qquad\qquad] \\ & \sqsubseteq & \gamma(\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} F^{\#^i}(\bot^\#)). \qquad\qquad ([\qquad\qquad]) \end{array}$$

□

Exercise 2 넓히기(widening) 안전성 정리의 증명을 완성하라.

- 넓히기 $\triangledown$의 조건:

$$\forall a, b \in D^{\#} : (a \sqsubseteq a \triangledown b) \ \wedge \ (b \sqsubseteq a \triangledown b) \tag{1}$$

이고

$$\forall \text{증가하는 체인} \{x_i\}_i : \text{체인 } y_0 = x_0, y_{i+1} = y_i \triangledown x_{i+1} \text{ 는 유한하다.} \tag{2}$$

- 넓히기로 정의되는 체인$\{{X^{\#}}_i\}_i$의 정의:

$$\begin{array}{rcll} {X^{\#}}_0 & = & \bot^{\#} & \\ {X^{\#}}_{i+1} & = & {X^{\#}}_i & \text{if } F^{\#}({X^{\#}}_i) \sqsubseteq {X^{\#}}_i \\ & = & {X^{\#}}_i \triangledown F^{\#}({X^{\#}}_i) & \text{else.} \end{array} \tag{3}$$

Thereom. $D^{\#}$는 CPO 이고, $F^{\#} : D^{\#} \to D^{\#}$는 단조함수이고, $\triangledown : D^{\#} \times D^{\#} \to D^{\#}$는 조건 (1) 과 (2)을 만족하면, (3)로 정의되는 체인 $\{{X^{\#}}_i\}_i$ 은 유한하고 그 끝은 $\lim_{i \in \mathbb{N}} {X^{\#}}_i \sqsupseteq \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} {F^{\#}}^i(\bot^{\#})$이다.

Proof. 체인 $\{{X^{\#}}_i\}_i$이 유한하다는 것과 $\forall i \in \mathbb{N} : {F^{\#}}^i(\bot^{\#}) \sqsubseteq {X^{\#}}_i$임을 보이면 된다.

- $\{F^{\#}({X^{\#}}_i)\}_i$가 증가하는 체인이면, 체인 $\{{X^{\#}}_i\}_i$은 (2)의 조건을 만족하므로 유한하게 된다. $\{F^{\#}({X^{\#}}_i)\}_i$가 증가하는 체인인가? 그렇다. 왜냐면, (3)에 의해서 $F^{\#}({X^{\#}}_{i+1})$는 $F^{\#}({X^{\#}}_i)$ 이거나 $F^{\#}({X^{\#}}_i \triangledown F^{\#}({X^{\#}}_i))$ 이다. 조건 (1)으로 $\square$ 이고 $F^{\#}$는 $\square$이므로, 항상 $F^{\#}({X^{\#}}_i) \sqsubseteq F^{\#}({X^{\#}}_{i+1})$이다.

- 이제 $\forall i \in \mathbb{N} : {F^{\#}}^i(\bot^{\#}) \sqsubseteq {X^{\#}}_i$을 보이자. 기초는 당연하다 ${F^{\#}}^0(\bot^{\#}) = \bot^{\#} \sqsubseteq {X^{\#}}_0$. ${F^{\#}}^i(\bot^{\#}) \sqsubseteq {X^{\#}}_i$라고 하자. $F^{\#}$가 $\square$ 이므로 ${F^{\#}}^{i+1}(\bot^{\#}) \sqsubseteq F^{\#}({X^{\#}}_i)$이다.

  (3)에 의해 ${X^{\#}}_{i+1}$는 두 경우가 있다. $F^{\#}({X^{\#}}_i) \sqsubseteq {X^{\#}}_i$일 때는 $\square$ 이므로, 이때는 $F^{\#}({X^{\#}}_i) \sqsubseteq {X^{\#}}_{i+1}$, 따라서 ${F^{\#}}^{i+1}(\bot^{\#}) \sqsubseteq {X^{\#}}_{i+1}$이다.

  $F^{\#}({X^{\#}}_i) \not\sqsubseteq {X^{\#}}_i$일 때는 $\square$이므로, 이때도 $\triangledown$의 조건에 의해 $F^{\#}({X^{\#}}_i) \sqsubseteq \square = {X^{\#}}_{i+1}$.

  모든 경우 $F^{\#}({X^{\#}}_i) \sqsubseteq {X^{\#}}_{i+1}$이므로, 귀납가정 ${F^{\#}}^{i+1}(\bot^{\#}) \sqsubseteq F^{\#}({X^{\#}}_i)$에 의해, ${F^{\#}}^{i+1}(\bot^{\#}) \sqsubseteq {X^{\#}}_{i+1}$이다. $\square$